

1 Simulation des variables aléatoires à densité

- EXERCICE 1 -

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2.

Soit $\lambda > 0$. On pose : $X = \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^2$ et on admet que X est une variable aléatoire à densité.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $J_n = n^2 M_n - \frac{1}{n}$ et on admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires à densité.

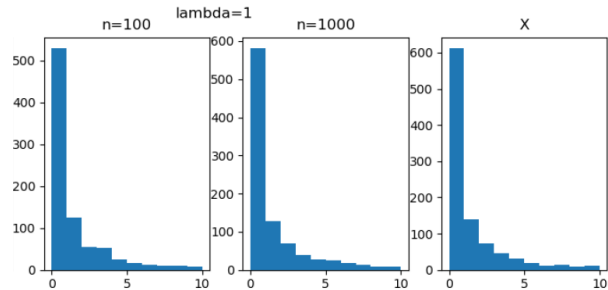
1. (a) Écrire une fonction Python d'entête "def VarX(n,lamb) :" afin qu'elle renvoie un tableau numpy contenant n réalisations de la variable aléatoire X (lamb représente le paramètre λ).

```
1 def VarX(n,lamb) :
2     X = np.zeros(n)
3     for i in range(n) :
4         Y = rd.exponential(1/2) # Y suit la loi exp(2))
5         X[i] = (Y/lamb)**2
6     return X
```

- (b) On prend $\lambda = 1$. Écrire une fonction Python d'entête "def VarJ(n) :" qui renvoie une liste de 1000 valeurs simulant la variable aléatoire J_n . On utilisera les fonctions précédentes.
La fonction "VarX" permet de créer une liste de n variables $(X_1, \dots, X_n)$. La fonction "np.min" permet d'obtenir le minimum donc de simuler M_n . On a donc :

```
1 def VarJ(n) :
2     Mn = np.min(VarX(n,1)) # avec lamb=1
3     Jn = n**2*Mn - 1/n
4     return ( Jn )
```

2. On prend $\lambda = 1$. On donne ci-dessous les histogrammes des variables aléatoires J_{100} , J_{1000} et X créés à partir de 1000 valeurs réparties entre les classes $[k, k+1[$ $k \in \llbracket 0;9 \rrbracket$.



- (a) Quelle programme permet d'obtenir le premier histogramme?

```
1 # On crée 1000 valeur de Jn grace à la fonction précédente
2 J = VarJ(100)
3 # On crée l'histogramme des valeurs de J
4 # les classes sont créées avec np.arange(10)
5 plt.hist(J,np.arange(10))
6 # On affiche
7 plt.show()
```

- (b) Que peut-on conjecturer?

Pour de grandes valeurs de n ($n = 100$ puis $n = 1000$), les histogrammes de J_n se rapproche de l'histogramme de X donc que la loi de J_n se rapproche de la loi de X .

On dit que J_n converge en loi vers X .

- EXERCICE 2 (LOI DE PARETO) -

Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère une variable aléatoire X admettant pour fonction

de répartition la fonction : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$.

On admet que X est une variable à densité. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètres a et b .

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que la variable aléatoire $Y = bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .

On a $U(\Omega) =]0, 1[$. Comme $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{a}}$ est décroissante sur $]0, 1[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$ donc $U^{-\frac{1}{a}}(\Omega) = [1, +\infty[$ et comme $b > 0$, on a : $Y(\Omega) = [b, +\infty[$.

- Si $x < b$, alors : $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ car $Y(\Omega) = [b, +\infty[$.

- Si $x \geq b$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(bU^{-\frac{1}{a}} \leq x) \\ &= P(U^{-\frac{1}{a}} \leq \frac{x}{b}) \quad \text{car } b > 0 \\ &= P\left(U \geq \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad \text{car } x \mapsto x^{-a} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\\ &= P\left(U \geq \left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \\ &= 1 - F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \quad \text{car } U \text{ v.a à densité} \\ &= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a \quad \text{car } \left(\frac{b}{x}\right)^a \in]0, 1] \end{aligned}$$

Finalement, on a : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$ donc $Y = bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. En déduire une fonction d'en-tête "def Pareto(a,b) :" qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X .

On sait simuler U donc aussi $Y = bU^{-\frac{1}{a}}$

```
1 def Pareto(a,b) :
2     U = rd.rand()
3     Y = b*U**(-1/a)
4     return ( Y )
```

3. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto de paramètres a et 1 et on pose pour tout entier n non nul : $Z_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$.

Écrire une fonction d'en-tête "def SimuZ(a,n) :" qui simule la variable Z_n , les valeurs de a et n étant données en paramètre.

```
1 def SimuZ(a,n) :
2     Z = np.zeros(n)
3     for i in range(n) :
4         Z[i] = Pareto(a,1) # on simule Y_1 , ... , Y_n
5     return (np.min(Z))
```

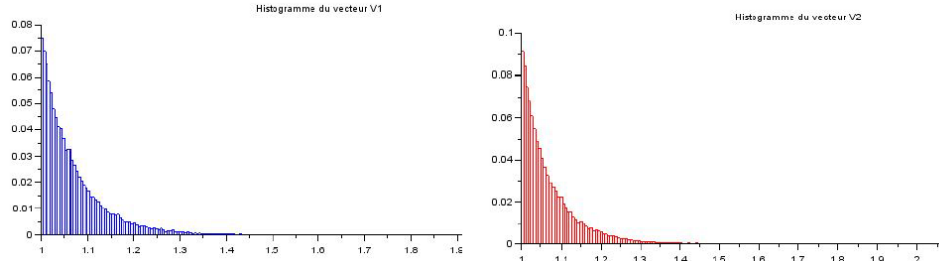
4. On considère le programme suivant. Pour différentes valeurs de a et n choisies par l'utilisateur on obtient le même type d'histogramme que celui représenté ci-dessous.

Que peut-on conjecturer?

```

1 a = float(input("Donner la valeur de a : "))
2 n = int(input("Donner la valeur de n : "))
3 V1 = [Simu_Z(a,n) for i in range(10000)]
4 V2 = [Pareto(a*n,1) for i in range(10000)]
5 plt.hist(V1, 100, density=True)
6 plt.hist(V2, 100, density=True)
7 plt.show()

```



Le premier graphique représente l'histogramme de la variable $Z_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$ avec chaque Y_i suivant la loi de Pareto de paramètres a et 1.

Le second graphique représente l'histogramme d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres $a \times n$ et 1 : $\mathcal{P}(a \times n, 1)$.

La similarité entre les deux graphiques permet de conjecturer que Z_n suit une loi de Pareto de paramètres $a \times n$ et 1 : $\mathcal{P}(a \times n, 1)$.

2 Méthode d'inversion

- EXERCICE 3 (LOI EXPONENTIELLE) -

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

1. (a) **Rappeler la fonction de répartition F_X de X .**

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- (b) **Montrer que la fonction F_X définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0; 1[$ et déterminer l'expression de sa fonction réciproque notée F_X^{-1} .**

Sur, $\mathbb{R}_+^*$, on a : $F_X'(t) = \lambda e^{-\lambda t} > 0$ car $\lambda > 0$ donc F_X est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle définit une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] \lim_{0} F_X; \lim_{+\infty} F_X [=]0; 1[$.

On a alors pour tout $y \in]0; 1[$:

$$\begin{aligned}
 F_X(t) = y &\iff 1 - e^{-\lambda t} = y \\
 &\iff e^{-\lambda t} = 1 - y \\
 &\iff -\lambda t = \ln(1 - y) \\
 &\iff t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]0; 1[$: $F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$.

2. (a) **Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.**

Montrer que Y suit la même loi que X .

Soit $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Comme $U(\Omega) =]0, 1[$, on a $0 < 1 - U < 1$ donc $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) > 0$. Ainsi, Y est bien défini et $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, $F_Y(t) = 0$ car $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
 F_Y(t) = P(Y \leq t) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq t\right) \\
 &= P(\ln(1 - U) \geq -\lambda t) \quad \text{car } -\lambda < 0 \\
 &= P\left(1 - U \geq e^{-\lambda t}\right) \quad \text{car exp croissante} \\
 &= P\left(U \leq 1 - e^{-\lambda t}\right) \\
 &= F_U\left(1 - e^{-\lambda t}\right)
 \end{aligned}$$

Or, $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ donc $F_U(x) = x$ si $x \in]0, 1[$ par définition.

Mais pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a (avec $\lambda > 0$) :

$t \geq 0 \implies -\lambda t \leq 0 \implies 0 < e^{-\lambda t} \leq 1 \implies 1 - e^{-\lambda t} \in]0, 1[$ ce qui donne :

$$F_Y(t) = F_U\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, $F_Y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- (b) **Simuler une réalisation d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 2 à l'aide de la commande "rd.rand()".** D'après la question précédente, si U suit la loi uniforme sur $]0; 1[$, alors $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Comme $rand()$ simule la loi uniforme sur $[0; 1]$, on obtient :

```

1 lamb = 2
2 U = rd.rand()
3 Y = -1/lamb * np.log(1-U)

```

- (c) **Quelle valeur approchée est affichée par le programme suivant ?**

```

1 n = 1000
2 Y = np.zeros(n)
3 for i in range(n) :
4     Y[i] = - 2 * np.log( 1 - rd.rand() )
5 print(np.mean(Y))

```

Ce programme crée un vecteur contenant 1000 réalisations de Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$ (car $2 = \frac{1}{\lambda}$ dans la formule) puis il affiche sa moyenne.

On obtient donc une valeur approchée de l'espérance de Y , soit environ $\frac{1}{\lambda} = 2$.

- EXERCICE 4 (LOI DE GUMBEL) -

On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Gumbel, dont une densité est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$$

1. (a) **Déterminer la fonction de répartition F_X de X .**

On a pour tout réel t :

$$\begin{aligned}
 F_X(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-x} e^{-e^{-x}} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^t e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[e^{-e^{-x}} \right]_A^t = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(e^{-e^{-t}} - e^{-e^{-A}} \right) = e^{-e^{-t}} \quad \text{par composition de limite}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $F_X(t) = e^{-e^{-t}}$.

- (b) **Montrer que la fonction F_X est bijective et déterminer l'expression de sa fonction réciproque notée F_X^{-1} .**

$f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc F_X est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, 1[$ (car fonction de répartition). On a alors pour tout $y \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(t) = y &\iff e^{-e^{-t}} = y \\ &\iff -e^{-t} = \ln(y) \\ &\iff e^{-t} = -\ln(y) \\ &\iff -t = \ln(-\ln(y)) \\ &\iff t = -\ln(-\ln(y)) \end{aligned}$$

Ainsi, $F_X^{-1}(t) = -\ln(-\ln(t))$.

2. (a) **Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et $Y = -\ln(-\ln(U))$.**

Montrer que Y suit la même loi que X .

On peut montrer ce résultat par le calcul comme dans l'exercice précédent.

Voici une méthode théorique qui permet de répondre à la question de manière plus générale.

On remarque que $Y = -\ln(-\ln(U)) = F_X^{-1}(U)$ avec U la loi uniforme sur $[0; 1]$. Montrons alors que Y et X suivent la même loi.

En effet, on a $Y(\Omega) = F_X^{-1}(U)(\Omega) = \mathbb{R}$ d'après la question précédente et pour tout réel t , on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P(F_X^{-1}(U) \leq t) \\ &= P(U \leq F_X(t)) \quad \text{car } F_X \text{ est une bijection strictement croissante} \\ &= F_X(t) \quad \text{car } F_X(t) \in]0, 1[\text{ fonction de répartition} \end{aligned}$$

Ainsi, Y et X ont même fonction de répartition donc suivent la même loi.

- (b) **Écrire une fonction d'entête "def LoiGumbel() : " qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire X suivant la loi de Gumbel.**

Comme Y et X suivent la même loi donc pour simuler X il suffit de simuler $Y = -\ln(-\ln(U))$.

```
1 def LoiGumbel() :
2     U = rd.rand()
3     G = -np.log(-np.log(U))
4     return( G )
```

- (c) **A l'aide de la fonction "LoiGumbel", écrire un programme qui renvoie une approximation de l'espérance de la variable aléatoire X .**

On va simuler un grand nombre de réalisation de X à l'aide de la fonction LoiGumbel() puis on va calculer la moyenne pour obtenir une estimation de l'espérance (d'après la loi faible des grands nombres).

```
1 n = 1000 // nombre de réalisations
2 S = 0
3 for i in range(n) :
4     G = LoiGumbel() \\ on simule X
5     S = S + G        \\ on additionne tout
6 print (S/n)         \\ on affiche la moyenne
```

- EXERCICE 5 (GÉNÉRALISATION : MÉTHODE D'INVERSION) -

Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F définit une bijection de $]a; b[$ sur $]0; 1[$.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$.

Montrer que la variable $Z = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

Tout d'abord, on a $Z(\Omega) = F^{-1}(U)(\Omega) =]a; b[$ car F^{-1} définit une bijection de $]0; 1[$ sur $]a; b[$.

Si $t \leq a$, on a : $F_Z(t) = 0$ car $Z(\Omega) =]a; b[$.

Si $t < \leq b$, on a : $F_Z(t) = 1$ car $Z(\Omega) =]a; b[$.

Pour tout réel $t \in]a; b[$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) \\ &= P(F^{-1}(U) \leq t) \\ &= P(U \leq F(t)) \quad \text{car } F \text{ est une bijection strictement croissante} \\ &= F(t) \quad \text{car } F(t) \in]0, 1[\end{aligned}$$

Ainsi, $Z = F^{-1}(U)$ et X ont même fonction de répartition donc suivent la même loi.