

Réduction des matrices carrées

Étant donné un espace vectoriel E de dimension n , et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on cherche à construire une base de E dans laquelle la matrice de f est « simple » (dans l'idéal, sous forme diagonale si possible). On dit qu'on cherche à réduire l'endomorphisme f .

I - Matrice de passage et formules de changement de base

I.1 - Matrice de passage

Définition 1

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E .
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, la matrice dont la $j^{\text{ième}}$ colonne contient les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 1

Soit $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $\mathcal{C}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X - 1)^2$, une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.

Proposition 1

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{ est inversible et } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

On peut donc obtenir $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ en appliquant le pivot de Gauss à la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Remarque 1

Une matrice de passage entre deux bases est inversible ; il est inutile de le redémontrer.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$, où $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (0, 1, -1)$, une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2. Vérifier que la matrice de passage $S = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

I.2 - Changement de coordonnées d'un vecteur

Proposition 2

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et soit $\vec{u} \in E$.
On note $X = X_{\mathcal{B}}$ le vecteur colonne associé à $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, $X' = X_{\mathcal{B}'}$ le vecteur colonne associé à $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors on a :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'} \quad \text{soit} \quad X = PX'$$

I.3 - Changement de base et matrices semblables

Définition 2

On dit que les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = PNP^{-1}.$$

Remarque 2

Noter que : $M = PNP^{-1} \iff N = P^{-1}MP$.

Proposition 3 : Formule de changement de base

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et f un endomorphisme de E .
On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$) la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \quad \text{soit} \quad M = PNP^{-1}$$

Théorème 1

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Méthode 1

Si M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la propriété précédente permet de justifier l'existence d'une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$ sans avoir à calculer explicitement ni P ni P^{-1} .

La matrice P en question est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c$.

Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X - 1)^2$, une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ puis expliciter P .

Proposition 4

Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible telle que $M = PNP^{-1}$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = P N^k P^{-1}$$

Remarque 3

- On sait facilement calculer les puissances de matrices diagonales (et seulement elles) :

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ alors, } \forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

- Si la matrice M est semblable à une matrice diagonale D , les puissances de M s'obtiennent facilement à partir de la formule $M^k = P D^k P^{-1}$.

Exercice 4

Soit M la matrice de f trouvée dans l'exercice 3. Déterminer la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

II - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres

II.1 - Définitions

Définition 3 : Valeur propre, vecteur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'un réel λ est une valeur propre de la matrice A ssi il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$X \neq 0 \quad \text{et} \quad AX = \lambda X.$$

Un vecteur X vérifiant cette égalité est appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Définition 4 : Spectre

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé spectre de A et est noté : $Sp(A)$.

Méthode 2 : Montrer qu'un vecteur donné est un vecteur propre

Pour montrer qu'un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné est un vecteur propre de A , il faut :

- Justifier (ou simplement dire) que $X \neq 0$.
- Calculer AX et faire apparaître λX .

La valeur de λ trouvée sera la valeur propre associée à X .

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs propres de A ? Si oui, donner les valeurs propres associées.

II.2 - Caractérisation des éléments propres

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A . On pose :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelle sous-espace propre de A associé à λ .

Remarque 4

Le sous-espace propre E_λ contient tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A . Alors le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ vérifie :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Le théorème suivant donne des critères pour savoir si un réel λ est valeur propre.

Théorème 3 : Caractérisation des valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in Sp(A) \iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) \neq n.$$

Méthode 3 : Montrer qu'un réel donné est une valeur propre.

Pour montrer qu'un réel λ donné est une valeur propre de A :

- On peut montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible (rang, pivot Gauss, CL colonnes,...). Cette méthode ne permet pas d'obtenir une base de l'espace propre $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.
- On peut montrer que $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ en déterminant une famille génératrice de cet espace. Cette méthode permet alors d'obtenir une base de l'espace propre $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Exercice 6

Les réels $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ sont-ils des valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$?

Si c'est le cas, donner une base de l'espace propre associé.

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ n'est pas inversible} \iff 0 \text{ est une valeur propre de } A.$$

Remarque 5

Cette proposition donne une nouvelle caractérisation de l'inversibilité :

$$A \text{ est inversible} \iff 0 \notin Sp(A).$$

II.3 - Obtention des valeurs propres

II.3.a - Cas particulier des matrices triangulaires

Théorème 4

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (ou diagonale) sont ses éléments diagonaux.

Exercice 7

1. Donner deux matrices (une triangulaire et l'autre non) qui admettent $\lambda = 0$ comme valeur propre.

2. Déterminer le spectre de la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis donner une base de ses sous-espaces propres.

II.3.b - Cas particulier des matrices de $M_2(\mathbb{R})$

Théorème 5

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0.$$

Exercice 8

Déterminer les valeurs propres de la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ puis donner une base de ses sous-espaces propres.

II.3.c - Utilisation d'un polynôme annulateur

Définition 5

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

- Pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $P(A)$ la matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$.
- On dit que le polynôme P est un polynôme annulateur de A si et seulement si $P(A) = 0$.

Attention

On prendra garde que $A^0 = I_n$. Par exemple, si $P(X) = 2X^2 - 3X + 5$, alors : $P(A) = 2A^2 - 3A + 5I$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis en déduire un polynôme annulateur de A .

Théorème 6

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A . Alors :

Toute valeur propre de A est une racine de P .

Attention

Ce théorème 6 indique que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P .
La réciproque de ce théorème est fausse : toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres de A .

Méthode 4 : Trouver des valeurs propres avec un polynôme annulateur

Soit P un polynôme annulateur de A : $P(A) = 0$.

- On recherche l'ensemble des racines de P (noté $rac(P)$).
- On peut alors dire que les racines de P sont des valeurs propres possibles de A : $Sp(A) \subset rac(P)$.
- Pour chacune des racines λ de P , on vérifie si elle est valeur propre de A en cherchant $\text{Ker}(A - \lambda I)$.
 - Si $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, alors λ n'est pas valeur propre de A .
 - Si $\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Vect}(\dots) \neq \{0\}$, alors λ est valeur propre de A .

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on admet que $A^3 - 7A^2 + 10A = 0$

- Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
- Déterminer le spectre de A .

II.3.d - Cas général

La méthode suivante, basée sur le théorème 3, permet de trouver les valeurs propres d'une matrice A quand aucune indication n'est donnée par l'énoncé (aucune valeur propre, aucun vecteur propre).

Méthode 5 : Trouver les valeurs propres d'une matrice A .

- Rédaction : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I_n$ est non inversible.
- On applique alors le pivot de Gauss à la matrice $A - \lambda I_n$ pour la mettre sous forme triangulaire.
- Les valeurs propres de la matrice A sont exactement les valeurs de λ qui annulent un des coefficients diagonaux de la forme triangulaire obtenue.

Exercice 11

Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

II.4 - Propriétés

Théorème 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A et $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors :

La famille $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Théorème 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A admet au plus n valeurs propres.

III - Réduction des matrices carrées

III.1 - Matrice diagonalisable

Définition 6

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable ssi il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Ainsi, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Théorème 9

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A .
Soient $\mathcal{F}_1$ une famille libre du sous-espace propre E_{λ_1} , $\mathcal{F}_2$ une famille libre du sous-espace propre E_{λ_2} , ..., et $\mathcal{F}_p$ une famille libre du sous-espace propre E_{λ_p} .
Alors la famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p)$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ est libre.

Théorème 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

On a alors :

$$A = PDP^{-1}$$

avec :

- $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A .
- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de A .
 P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.

Remarque 6

Les valeurs propres dans la matrice D et les vecteurs propres dans la matrice P doit être rangés dans le même ordre.

Exercice 12

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de l'exercice 10 est diagonalisable et la diagonaliser.

III.2 - Cas particuliers

Les deux cas particuliers suivants sont fréquemment rencontrés mais ces résultats ne peuvent pas être utilisés directement. Ils doivent être redémontrés à chaque fois.

III.2.a - Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes

Proposition 7 : *A redémontrer à chaque fois*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Exercice 13

La matrice $O = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

III.2.b - Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admet qu'une seule valeur propre

Proposition 8 : *A redémontrer à chaque fois*

Soit A une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre $\lambda : Sp(A) = \{\lambda\}$.

Si $A \neq \lambda I_n$, alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 14

La matrice $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

III.2.c - Matrices symétriques

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite symétrique si elle vérifie : ${}^t A = A$.

Remarque 7

Les coefficients d'une matrice symétrique sont égaux de part et d'autre de sa diagonale.

Théorème 11

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Remarque 8

Ainsi, lorsque A est symétrique, on peut conclure directement que A est diagonalisable.

Cependant, on ne connaît ni les valeurs propres ni les espaces propres de A . Il faudra les déterminer pour diagonaliser la matrice A .

Exercice 15

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $B = A + {}^t A$ est diagonalisable.
2. Justifier que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis la diagonaliser.