

Couples et suites de variables aléatoires discrètes

I - Couples aléatoires discrets

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y , avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable.

Définition 1

On appelle couple aléatoire discret une application $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$.

Ainsi, on peut écrire $V = (X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, avec :

$$\forall \omega \in \Omega, V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

I.1 - Loi conjointe

Définition 2 : Loi conjointe

La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée de la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto P([X = x], [Y = y]) \end{aligned}$$

où $P([X = x], [Y = y])$ est une notation pour signifier $P([X = x] \cap [Y = y])$.

Méthode 1

Pour obtenir la loi du couple (X, Y) :

- On commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- On calcule les valeurs de $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$. On obtient le plus souvent cette probabilité en décrivant l'évènement $([X = x] \cap [Y = y])$. Certaines de ces probabilités peuvent être nulles (si l'évènement est impossible) mais elles font toutefois partie de la loi conjointe. On pourra alors être amené à distinguer les cas selon les valeurs de x et y .

Remarque 1

Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.

Proposition 1

Les événements $([X = x] \cap [Y = y])_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}$ forment un système complet d'événements. On a alors :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = 1$$

I.2 - Loïs marginales

Définition 3 : Loi marginale

- La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire X .
- La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire Y .

Méthode 2 : Obtention des lois marginales à l'aide de la formule des probabilités totales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont on connaît la loi conjointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le SCE $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$.

$$P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{ou} \quad P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([Y = y])P_{[Y=y]}([X = x])$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le SCE $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

$$P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{ou} \quad P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x])P_{[X=x]}([Y = y])$$

Remarque 2

Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

Exercice 1

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules dans cette urne sans remise. On note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .

Exercice 2

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

1. Déterminer la loi de X .
2. Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X, Y) .
3. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .

I.3 - Loïs conditionnelles

Définition 4

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Soit $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $P([X = x]) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ la donnée des valeurs

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P_{[X=x]}([Y = y]).$$

Méthode 3 : Obtenir la loi conditionnelle

On peut obtenir la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ (soit $P_{[X=x]}([Y = y])$ pour $y \in Y(\Omega)$) en décrivant l'évènement $[Y = y]$ lorsque l'évènement $[X = x]$ est réalisé. On peut par exemple reconnaître un évènement impossible ou encore une expérience type d'une loi usuelle connue.

Exercice 3

Soit n un entier avec $n \geq 2$. On considère n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires.

On choisit une urne au hasard et on y effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche. On note Z le numéro de l'urne choisie et X_n le nombre de tirages effectués.

1. Rappeler la loi de Z .
2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Préciser $X_n(\Omega)$ puis déterminer la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z = i]$.
3. En déduire que la loi de X_n est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \left(\frac{n-i}{n} \right)^{k-1}$.

Exercice 4

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et on suppose que les lancers sont indépendants. On note X le rang d'apparition du premier pile. Si le premier pile est arrivé au n -ième lancer, on note alors Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

- 1. Déterminer la loi de X .
- 2. Préciser $Y(\Omega)$. Soit $n \geq 1$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
- 3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n$.

II - Indépendance de variables aléatoires discrètes
II.1 - Cas de deux variables

Définition 5

On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes ssi :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) \times P([Y = y])$$

Remarque 3

Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente. On l'obtient souvent avec $P([X = x] \cap [Y = y]) = 0$ (évènement impossible) alors que $P([X = x]) \neq 0$ et $P([Y = y]) \neq 0$.

Exercice 5

Les variables aléatoires X et Y de l'exercice 1 sont-elles indépendantes ?

II.2 - Cas de n variables

Définition 6

- On dit que les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes ssi

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

- On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $P(Z_n = 0)$.

II.3 - Lemme des coalitions

Proposition 2 : Lemme des coalitions

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Exemple 1

- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 variables aléatoires discrètes discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

III - Fonctions de deux variables aléatoires discrètes

Théorème 1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et g une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On considère la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$. La loi de $Z = g(X, Y)$ est donnée par :

$$Z(\Omega) = \{z = g(x, y) \mid x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$$

et

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P([Z = z]) = \sum_{(x,y) \mid g(x,y)=z} P([X = x] \cap [Y = y]),$$

la somme précédente portant sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $g(x, y) = z$.

Exercice 7

On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = B + G$.

Méthode 4 : Loi d'une somme, d'une différence

On obtient la loi de la somme (ou de la différence) deux variables aléatoires discrètes X et Y par application de la formule des probabilités totales avec au choix le SCE associé à X ou à Y . Par exemple, avec le SCE associé à X , la loi de $X + Y$ est donnée par : $\forall z \in (X + Y)(\Omega)$,

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [X + Y = z]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} P([X = x] \cap [Y = z - x])$$

Noter que la probabilité $P([X = x] \cap [Y = z - x])$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$, ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de la somme.

Exercice 8

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Montrer que :

$$\forall n \geq 2, P(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P((Y = n - k) \cap (X = k)) \quad \text{puis que : } P(X + Y = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}.$$

Exercice 9

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Calculer $P(X = Y)$.

Théorème 2 : Somme des lois classiques

- Somme de lois de Bernoulli.

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p), X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p), \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ sont mutuellement indépendantes, alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- Stabilité des lois binomiales.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

- Stabilité des lois de Poisson.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 10

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer par récurrence que $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda)$.

IV - Calculs d'espérance

IV.1 - Espérance d'une somme

Proposition 3 : *Linéarité de l'espérance*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$E(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \lambda_2 E(X_2) + \dots + \lambda_n E(X_n) \quad \text{soit} \quad E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E(X_i).$$

Exercice 11

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer l'espérance de M .

Proposition 4 : *Croissance de l'espérance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.

- Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
- Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

IV.2 - Espérance de $Z = g(X, Y)$ - Théorème de transfert

Théorème 3 : *Théorème de transfert*

Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a sous réserve de convergence absolue :

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

On obtient alors l'espérance du produit XY par application du théorème de transfert.

Théorème 4 : *Espérance d'un produit*

Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a sous réserve de convergence absolue :

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Exercice 12

Soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre p , indépendantes.

1. Déterminer la loi de XY puis en déduire $E(XY)$.
2. Déterminer $E(XY)$ à l'aide du théorème de transfert.

Théorème 5

Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors XY admet une espérance, et on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Remarque 4

On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes en vérifiant que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Exercice 13

Soient X_1, X_2 , et X_3 des variables Bernoulli de paramètre p , indépendantes.
On pose $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$. Calculer $E(Y_1 Y_2)$. Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

V - Variance et covariance

V.1 - Covariance

Définition 7

Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2.
La covariance de X et Y est définie par :

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Théorème 6 : *Formule de Koenig-Huygens*

Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, on a :

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

Exercice 14

Déterminer la covariance des variables X et Y de l'exercice 1.

Proposition 5 : *Propriétés de la covariance*

- Symétrie : $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- Linéarité à gauche : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \text{cov}(X_1, Y) + \mu \text{cov}(X_2, Y)$.
- Linéarité à droite : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \text{cov}(X, Y_1) + \mu \text{cov}(X, Y_2)$.

Exercice 15

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.

Proposition 6

Si X et Y sont indépendantes, alors : $\text{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse !

V.2 - Variance d'une somme

Théorème 7

- Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ également, et :
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y).$$
- Si X et Y sont indépendantes, et admettent une variance, alors $X + Y$ aussi, et on a :
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$
- Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et on a :
$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Exercice 16

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la variance de M .

V.3 - Coefficient de corrélation linéaire

Définition 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles.

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Théorème 8

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

Exercice 17

On a obtenu dans l'exercice 15 l'égalité suivante : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.

En étudiant le discriminant du polynôme en λ obtenu, montrer que : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Proposition 7

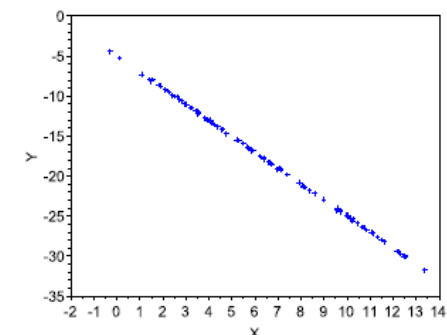
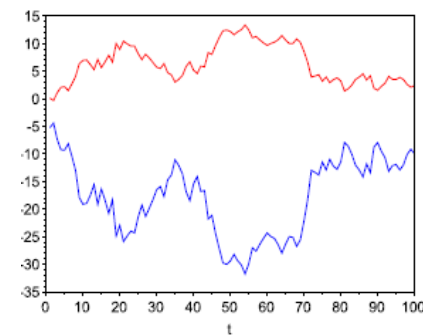
Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

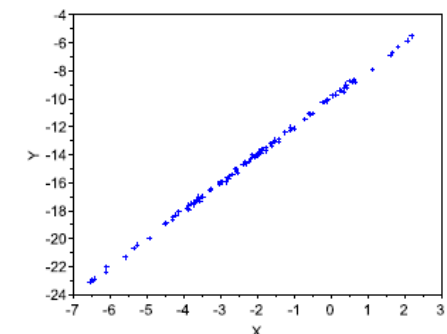
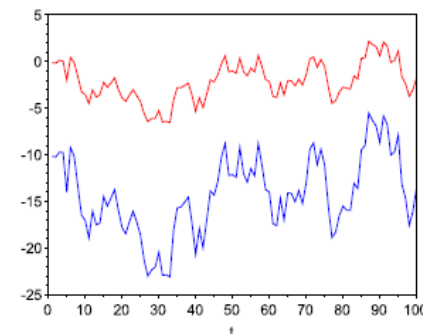
- Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à -1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
 - ★ Plus le coefficient $\rho_{X,Y}$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1 , plus la corrélation entre les variables est forte.
 - ★ Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.
 - ★ Une corrélation positive ($\rho_{X,Y} > 0$) indique que les variables X et Y varient dans le même sens.
 - ★ Une corrélation négative ($\rho_{X,Y} < 0$) indique que les variables X et Y varient en sens inverse.

Exercice 18

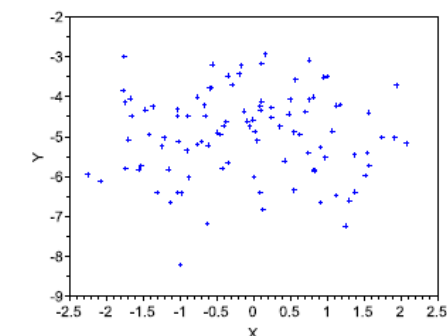
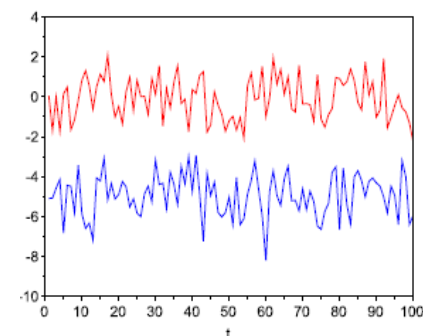
Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y de l'exercice 1 et interpréter son signe.



Corrélation négative



Corrélation positive



Corrélation nulle