

Systèmes différentiels

I - Système différentiel linéaire à coefficients constants

I.1 - Définition

Définition 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la donnée de n^2 réels.

On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants tout système de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

où les inconnues sont des fonctions $x_1, \dots, x_n$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

En notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$(\mathcal{E}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t)$$

Remarque 1

On pourra omettre la variable t lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et noter : $(\mathcal{E}) \quad X' = A \cdot X$.

On pourra parfois écrire $X(t)$ sous forme de vecteur ligne $X(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t))$.

Exercice 1

Résoudre le système différentiel $X' = DX$ lorsque $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonale, de diagonale (a, b, c) .

Théorème 1 : Problème de Cauchy

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy $(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} X' = A \cdot X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$,

c'est-à-dire qu'il existe un unique vecteur fonction $X(t)$ vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

I.2 - Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisableThéorème 2 : Solutions du système différentiel $X' = A \cdot X$ avec A diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note :

- $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
- $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A associées aux vecteurs propres $(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

Alors, les solutions du système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = A \cdot X$ sont

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto k_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} U_n, \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Remarque 2

- Les valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ne sont pas forcément distinctes.
- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le vecteur $e^{\lambda_1 t} U_i$ est solution de $(\mathcal{E})$ (en prenant les autres constantes k_j nulles).

Méthode 1 : Solutions du système différentiel $X' = A \cdot X$ lorsque A diagonalisable

Lorsque A est diagonalisable, l'obtention de ses valeurs propres et des vecteurs propres associés donne l'ensemble des solutions du système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = A \cdot X$ avec la formule du théorème 2.

Exercice 2

- Résoudre le problème de Cauchy $(\mathcal{E}_1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ vérifiant $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.
- On considère $(\mathcal{E}_2) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$ et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que les vecteurs U , V et W sont des vecteurs propres de la matrice A associée au système différentiel $(\mathcal{E}_2)$ puis déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_2)$.

I.3 - Résolution dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable

Si la matrice A n'est pas diagonalisable, la résolution sera guidée comme sur l'exemple suivant.

Exercice 3

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$, où x et y sont des fonctions inconnues dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $X' = AX$.

- Déterminer la matrice A . Montrer que $Sp(A) = \{2\}$ puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.
- On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (inversible) et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On admet que $A = PTP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.
 - Justifier que $Y' = P^{-1}X'$ puis montrer que : $X' = AX \iff Y' = TY$.
 - On note $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$ puis en déduire les solutions de $(\mathcal{E}') \quad Y' = TY$.
Pour l'équation en u , on cherchera une solution particulière sous la forme $u_p(t) = kte^{2t}$.
 - Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

I.4 - Équation différentielle homogène d'ordre 2 et système différentiel

Théorème 3

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by = 0$$

On considère le système différentiel $(\mathcal{S}) \quad X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff X \text{ est solution de } (\mathcal{S})$$

Exercice 4

On se place dans le cadre du théorème 3

- Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.
- On suppose maintenant que $(\mathcal{E}) \quad y'' + 5y' - 6y = 0$.
 - Expliciter A puis montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A .
 - Retrouver alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

II - Trajectoires et points d'équilibre

II.1 - Définition

Définition 2 : Trajectoire

On appelle trajectoire du système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{où } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ est une solution de } (\mathcal{E})$$

A chaque condition initiale correspond une trajectoire.

Remarque 3

- Lorsque $n = 2$, la trajectoire associée à la solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est représentée par la courbe du plan constituée de l'ensemble des points : $\{(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$.
- L'unicité de la solution à un problème de Cauchy implique que si deux trajectoires se coupent en un point (même condition initiale), alors elles sont confondues. Ainsi, deux trajectoires soit sont disjointes, soit sont confondues.

Définition 3 : Point d'équilibre

On appelle point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = AX$ toute solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ constituée de fonctions constantes (les fonctions } x_i \text{ ne dépendent pas de } t).$$

On note souvent un point d'équilibre sous forme de vecteur ligne : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Remarque 4

Lorsque $n = 2$, la trajectoire associée à un point d'équilibre est réduite à un point du plan puisque les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont constantes.

Proposition 1 : Obtention des points d'équilibres

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = AX$.

- Le point $(0, 0, \dots, 0)$ est toujours un point d'équilibre.
- L'ensemble des points d'équilibres du système différentiel $X' = AX$ est donné par $\text{Ker}(A)$.
- En particulier, si A est inversible, le système admet pour unique point d'équilibre le point $(0, 0, \dots, 0)$.

II.2 - Convergence d'une trajectoire

Définition 4 : Trajectoire convergente, trajectoire divergente

- On dit qu'une trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ est convergente si : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t)$ existe et est finie. Dans ce cas, en notant $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$, on dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ converge vers le point $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.
- Dans le cas contraire, on dit que la trajectoire est divergente.

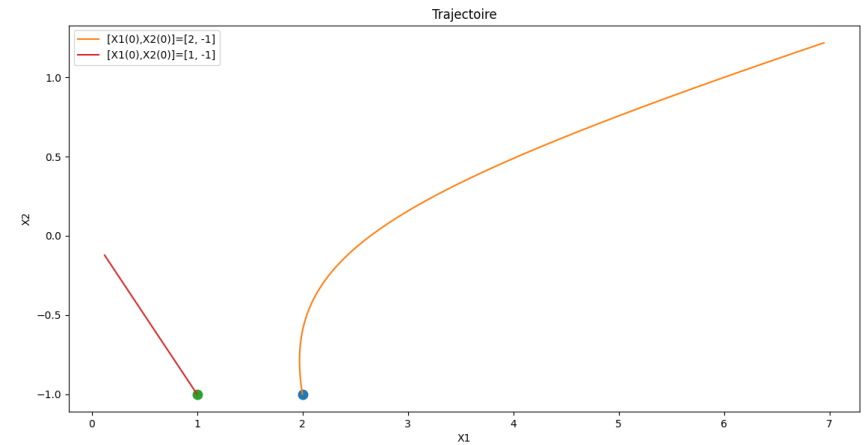
Remarque 5

- Si une trajectoire est convergente, sa limite est un point d'équilibre.
- Pour montrer qu'une trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ diverge, il suffit de montrer qu'une des fonctions x_i vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \pm\infty$.

Exercice 5

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}_1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ étudié à l'exercice 2.

- Donner l'ensemble des trajectoires de $(\mathcal{E}_1)$.
- Déterminer les points d'équilibre de $(\mathcal{E}_1)$.
- La solution du problème de Cauchy obtenue à l'exercice 2 est-elle convergente?
- Exhiber une trajectoire convergente.
- Identifier chacune de ces deux trajectoires sur la figure suivante.



Théorème 4 : Convergence dans le cas A diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \quad X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de $(\mathcal{E})$ convergent vers un point d'équilibre et on dit que ce point d'équilibre est stable.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

Exercice 6

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$.

Les trajectoires de $(\mathcal{E})$ sont-elles convergentes?