

## Fonctions de deux variables

I - Fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ I.1 - Continuité d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ 

## Définition 1

On appelle fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  toute application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui à un couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  associe un réel noté  $f(x, y)$ . On dit alors que  $f$  est une fonction de deux variables.

## Exemple 1

Les fonctions suivantes sont des fonctions de deux variables définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$f : (x, y) \rightarrow \frac{2x - 3x^2y^3}{x^2 + y^2 + 1}; \quad g : (x, y) \rightarrow e^{y^2 + xy}; \quad p : (x, y) \rightarrow x$$

## Définition 2 : Distance

Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points de  $\mathbb{R}^2$ .

On appelle distance de  $A$  à  $B$  le réel, noté  $d(A, B)$ , égal à :  $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ . Dans un repère orthonormal, le réel  $d(A, B)$  correspond à la longueur du segment  $[AB]$ .

## Définition 3

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

- On dit que  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tels que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad d((x, y), (x_0, y_0)) \leq r \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon.$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  ssi  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

## Théorème 1 : Opérations sur les fonctions continues

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La composée d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$  et d'une fonction continue sur  $I$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Proposition 1 : Continuité des fonctions polynomiales

- On appelle fonction polynomiale de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  toute combinaison linéaire de fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto x^i y^j$  avec  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Les fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Les fonctions coordonnées définies par  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont des fonctions polynomiales donc sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice 1

- Montrer que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{2x - 3x^2y^3}{x^2 + y^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Montrer que la fonction  $g : (x, y) \mapsto y \ln(x^2 + y)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

## I.2 - Représentation graphique et lignes de niveau

## Définition 4

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

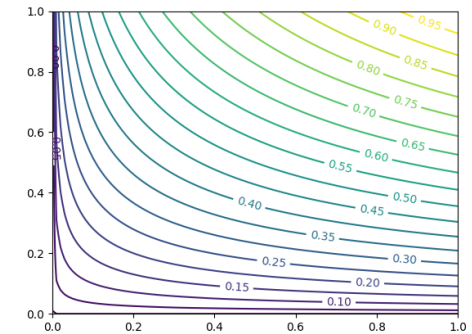
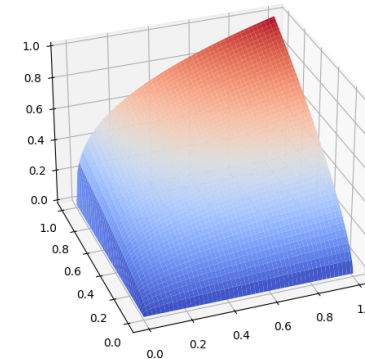
Pour tout réel  $\lambda$ , on appelle ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$  la partie  $\mathcal{E}_\lambda$  de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\mathcal{E}_\lambda = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \lambda\}.$$

## Exemple 2

Représentation graphique et ligne de niveau de la fonction de production de Cobb-Douglas :

$$F(K, L) = \beta K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ et } \alpha \in ]0, 1[$$



## II - Calcul différentiel

## II.1 - Dérivées partielles d'ordre 1

## Définition 5 : Dérivées partielles d'ordre 1

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Si, pour tout  $y \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction d'une variable  $x \mapsto f(x, y)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (par rapport à  $x$ ), alors la fonction qui, à tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , associe le nombre dérivé de la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  en  $x$  s'appelle dérivée partielle d'ordre 1 de  $f$  par rapport à la première variable (ici  $x$ ) et se note  $\partial_1(f)(x, y)$ .
- Si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction d'une variable  $y \mapsto f(x, y)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (par rapport à  $y$ ), alors la fonction qui, à tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , associe le nombre dérivé de la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  en  $y$  s'appelle dérivée partielle d'ordre 1 de  $f$  par rapport à la deuxième variable (ici  $y$ ) et se note  $\partial_2(f)(x, y)$ .

## Remarque 1

- Les dérivées partielles  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$  sont des fonctions de deux variables.
- La notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivation par rapport à une des variables en fixant les autres, c'est-à-dire en les considérant comme des constantes. Les règles de dérivation découlent alors directement des règles de dérivation des fonctions à une variable.

II.2 - Gradient

Définition 6 : Gradient

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 (notées  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$ ). On appelle gradient de  $f$  au point  $(x, y)$  le vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  suivant :

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

Remarque 2

Il est incorrect de parler de la "dérivée" d'une fonction de deux variables. On parle de gradient comme défini dans la définition précédente.

Exercice 2

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = ye^{-x^2-y}$ .
- Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 et les calculer.
  - Déterminer le gradient de la fonction  $f$  au point  $(1, 2)$ .
  - Déterminer tous les points  $(x, y)$  vérifiant  $\nabla(f)(x, y) = 0$ .

II.3 - Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$

Définition 7

Si les fonctions  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , on dit que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Théorème 2 : Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La composée d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$  et d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Proposition 2

Toute fonction polynomiale est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Exercice 3

Montrer que la fonction  $f : (x, y) \mapsto ye^{-x^2-y}$  de l'exercice 2 est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Théorème 3 : DL d'ordre 1

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors pour tout couple  $(h, k)$  au voisinage de  $(0, 0)$ , on a :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + {}^t\nabla(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h, k)$$

avec  $\epsilon(0, 0) = 0$  et  $\epsilon$  continue en  $(0, 0)$ .  
Cette égalité s'appelle le développement limité d'ordre 1 de  $f$  en  $(x, y)$  et cette écriture est unique.

II.4 - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 8

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 :  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$ . Si les fonctions  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$  admettent des dérivées partielles d'ordre 1, on dit que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2. On note alors :

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2(f) &= \partial_1(\partial_1(f)) & \partial_{2,2}^2(f) &= \partial_2(\partial_2(f)) \\ \partial_{1,2}^2(f) &= \partial_1(\partial_2(f)) & \partial_{2,1}^2(f) &= \partial_2(\partial_1(f)) \end{aligned}$$

II.5 - Fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$

Définition 9

Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et si ses dérivées partielles  $\partial_1(f)$  et  $\partial_2(f)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , alors on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Théorème 4 : Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La composée d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$  et d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Proposition 3

Toute fonction polynomiale est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Théorème 5 : Théorème de Schwarz

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , alors :

$$\partial_{1,2}^2(f) = \partial_{2,1}^2(f)$$

Exercice 4

Montrer que la fonction  $f : (x, y) \mapsto ye^{-x^2-y}$  de l'exercice 2 est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

II.6 - Matrice hessienne d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$

Définition 10 : Matrice hessienne

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La matrice hessienne de  $f$  au point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est la matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivante :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

Remarque 3

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  alors,  $\partial_{1,2}^2(f) = \partial_{2,1}^2(f)$  d'après le théorème de Schwarz donc la matrice hessienne de  $f$  est une matrice symétrique.

Exercice 5

Déterminer la matrice hessienne de la fonction  $f : (x, y) \mapsto ye^{-x^2-y}$  de l'exercice 2 au point  $(1, 2)$ .

III - Topologie de  $\mathbb{R}^2$

III.1 - Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 11 :</b> <i>Boule ouverte de <math>\mathbb{R}^2</math></i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Soit $r$ un réel strictement positif et $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <ul style="list-style-type: none"><li>On appelle boule ouverte de centre <math>A</math> et de rayon <math>r</math> l'ensemble <math>\mathcal{B}_o(A, r)</math> défini par :</li></ul> $\mathcal{B}_o(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, A) < r\}$ <ul style="list-style-type: none"><li>On appelle boule fermée de centre <math>A</math> et de rayon <math>r</math> l'ensemble <math>\mathcal{B}_f(A, r)</math> défini par :</li></ul> $\mathcal{B}_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, A) \leq r\}$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 12 :</b> <i>Partie ouverte, partie fermée.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Soit $U$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Une partie <math>U</math> de <math>\mathbb{R}^2</math> est dite ouverte ssi pour tout point <math>M \in U</math>, il existe <math>r &gt; 0</math> tel que <math>\mathcal{B}_o(M, r) \subset U</math> soit ssi pour tout <math>M \in U</math> il existe une boule ouverte de centre <math>A</math> incluse dans <math>U</math>.</li><li>Une partie <math>F</math> de <math>\mathbb{R}^2</math> est dite fermée ssi son complémentaire <math>\overline{F}</math> est une partie ouverte.</li></ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exemple 3</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Tout domaine de la forme <math>]a, b[ \times ]c, d[</math> avec <math>(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^4</math> est une partie ouverte de <math>\mathbb{R}^2</math>.</li><li>Les domaines <math>O_1 = \mathbb{R}^2</math>, <math>O_2 = R_+^* \times R_+^*</math>, <math>O_3 = ]0, 1[ \times R_+^*</math>, <math>O_4 = ]0, 1[ \times ]0, 1[</math> sont des exemples de parties ouvertes de <math>\mathbb{R}^2</math>.</li><li>Tout domaine de la forme <math>[a, b] \times [c, d]</math> avec <math>(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4</math> est une partie fermée de <math>\mathbb{R}^2</math>.</li></ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 13 :</b> <i>Partie bornée.</i>                                                                                                                                                                                                               |
| Une partie $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ est dite bornée ssi il existe $R > 0$ tel que pour tout $M \in \Omega$ , $d(M, O) \leq R$ (où $O$ est le point $(0, 0)$ ), c'est-à-dire que $\Omega$ est inclus dans la boule fermée de centre $O$ et de rayon $R$ . |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exemple 4</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Toute boule (ouverte ou fermée) de <math>\mathbb{R}^2</math> est une partie bornée de <math>\mathbb{R}^2</math>.</li><li>Tout domaine de la forme <math>]a, b[ \times ]c, d[</math> (ou <math>[a, b] \times [c, d]</math>) est une partie bornée de <math>\mathbb{R}^2</math>.</li></ul> |

|                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exercice 6</b>                                                                                                         |
| 1. Représenter graphiquement les domaines ouverts suivants :                                                              |
| $U_1 = ]0, 1[ \times ]0, 1[, \quad U_2 = ]0, 1[ \times \mathbb{R}, \quad U_3 = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$            |
| 2. Représenter graphiquement les domaines suivants                                                                        |
| $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x < y\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$ |

III.2 - Fonctions définies sur un ouvert

|                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 14</b>                                                                                                                                                                             |
| Toutes les définitions et propriétés vues précédemment sur des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ restent valables pour des fonctions définies sur une partie ouverte $U$ de $\mathbb{R}^2$ . |

IV - Recherche d'extrema

IV.1 - Extremum local

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 15</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $U$ et soit $(x_0, y_0)$ un point de $U$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <ul style="list-style-type: none"><li>On dit que <math>f</math> admet un minimum local en <math>(x_0, y_0)</math> s'il existe <math>r &gt; 0</math> tel que :</li></ul> $\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap U, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$ <ul style="list-style-type: none"><li>On dit que <math>f</math> admet un maximum local en <math>(x_0, y_0)</math> s'il existe <math>r &gt; 0</math> tel que :</li></ul> $\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap U, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$ <ul style="list-style-type: none"><li>On dit que <math>f</math> admet un extremum local en <math>(x_0, y_0)</math> lorsque <math>f</math> admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.</li></ul> |

IV.2 - Point critique

|                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 16</b>                                                                                                                                                          |
| Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ . On dit que $(x_0, y_0) \in U$ est un point critique de $f$ ssi                                            |
| $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc ssi} \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ |

|                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Théorème 6 :</b> <i>Condition nécessaire d'existence</i>                                                                                                                     |
| Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ .<br>Si $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in U$ , alors $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$ . |

|                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Attention</b>                                                                           |
| Réciproque fausse! Les points critiques de $f$ ne sont pas forcément des extremums locaux. |

IV.3 - Condition suffisante d'existence d'un extremum local

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Théorème 7</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U$ et soit $(x_0, y_0)$ un point critique de $f$ . Avec les notations précédentes, on a :                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Si les valeurs propres de la matrice hessienne <math>\nabla^2(f)(x_0, y_0)</math> sont strictement positives, alors <math>f</math> admet un minimum local en <math>(x_0, y_0)</math>.</li><li>Si les valeurs propres de la matrice hessienne <math>\nabla^2(f)(x_0, y_0)</math> sont strictement négatives, alors <math>f</math> admet un maximum local en <math>(x_0, y_0)</math>.</li><li>Si les valeurs propres de la matrice hessienne <math>\nabla^2(f)(x_0, y_0)</math> sont non nulles et de signes opposées, alors <math>f</math> n'admet pas d'extremum local en <math>(x_0, y_0)</math>. <i>On parle de point col ou point selle.</i></li><li>Si 0 est valeur propre de la matrice hessienne <math>\nabla^2(f)(x_0, y_0)</math>, alors on ne peut rien dire.</li></ul> |

|                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Méthode 1</b>                                                                                                                                                                                                  |
| Lorsqu'on cherche les extrema d'une fonction $f$ :                                                                                                                                                                |
| <ul style="list-style-type: none"><li>On commence tout d'abord par chercher les points critiques de <math>f</math>.</li><li>Pour chaque point critique, il faudra vérifier si c'est un extremum ou non.</li></ul> |

|                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exercice 7</b>                                                                                                      |
| Soit $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ . Déterminer, si ils existent, les extremums locaux de $f$ et préciser leurs natures. |

#### Remarque 4

Seul le signe des valeurs propres de la matrice hessienne est important pour utiliser le théorème 7. L'obtention explicite des valeurs propres n'est donc pas obligatoire.

En effet, on peut obtenir le signe des valeurs propres comme suit, en notant  $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matrice hessienne :

$$\lambda \in Sp(H) \iff \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

avec un polynôme en  $\lambda$  de la forme  $X^2 - SX + P$  avec  $P$  le produit et  $S$  la somme des racines (ici les valeurs propres). Ainsi :

- Si  $ad - bc > 0$  les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe et ce signe est celui de  $a + d$ .
- Si  $ad - bc < 0$  les deux valeurs propres sont non nulles et de signe contraire.
- Si  $ad - bc = 0$  au moins une des deux valeurs propres est nulle.

#### IV.4 - Extremum global

##### Définition 17

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $U$ .

- On dit que  $f$  admet un minimum global en  $(x_0, y_0)$  si :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

- On dit que  $f$  admet un maximum global en  $(x_0, y_0)$  si :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

##### Théorème 8

Soit  $f$  une fonction continue sur une partie  $F$  fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$ .

Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur  $F$ .

Ainsi,  $f$  admet un maximum et un minimum global sur  $F$ .

#### Remarque 5

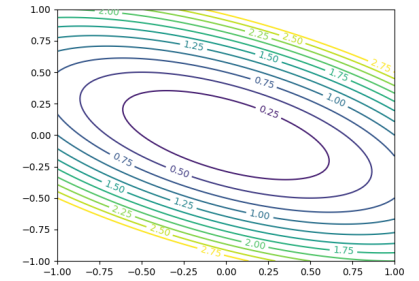
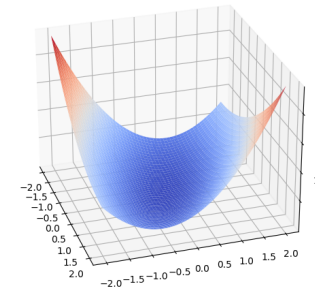
- Si  $f$  admet extremum global en  $(x_0, y_0)$ , alors c'est également un extremum local donc  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .
- Pour savoir si un extremum local en  $(x_0, y_0)$  est également un extremum global, il faut comparer  $f(x, y)$  et  $f(x_0, y_0)$  pour tout  $(x, y) \in U$ . Cette étape est souvent guidée par l'énoncé.

#### Exercice 8

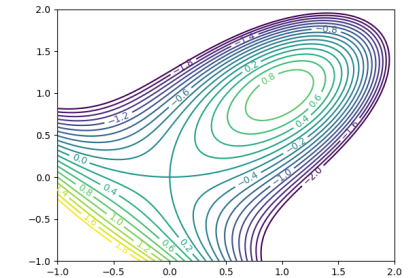
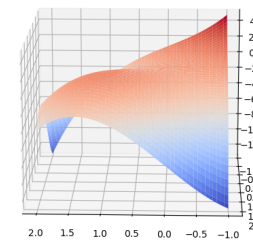
Soit  $f$  la fonction définie, pour tout couple  $(x, y)$  de l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , par :  $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
2. Montrer que pour tout  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  :  $f(x, y) \geq 4$ .
3. Montrer que  $f$  admet un minimum global  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  en tout point de la forme  $(a, a)$  avec  $a > 0$ .

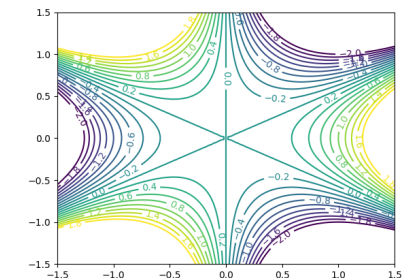
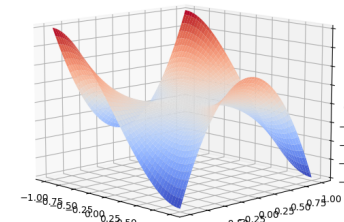
- $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$ .



- $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ .



- $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .



- $f(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ .

