

Chaines de Markov

I - Graphe probabiliste

Définition 1 : Vocabulaire des graphes

- Un graphe est la donnée d'un couple (S, A) , S représentant un ensemble fini de sommets et A un ensemble fini d'arêtes reliant deux sommets.
 - ★ Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.
 - ★ Une arête ayant même sommet de départ et d'arrivée s'appelle une boucle.
 - ★ Un sommet est dit isolé si aucune arête ne le relie à un autre sommet.
- Un graphe orienté est un graphe dans lequel chaque arête (appelée arc) est dirigée d'un sommet vers un autre, à l'aide d'une flèche.
- Un graphe pondéré est un graphe dans lequel chaque arête est pondérée par un réel appelé poids.

Définition 2

Un graphe probabiliste (d'ordre n) est un graphe orienté et pondéré dans lequel :

- Les n sommets du graphe s'appellent les états du système et sont numérotés de 1 à n .
- Les poids des arcs indiquent les probabilités de passage d'un état à l'autre.

Remarque 1

Dans un graphe probabiliste, la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Définition 3

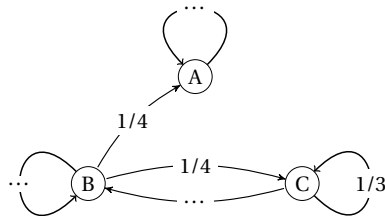
La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est la matrice $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme $p_{i,j}$ représente le poids de l'arc allant du sommet i au sommet j , c'est à dire la probabilité de passer de l'état i à l'état j .

Remarque 2

La somme de chaque ligne de la matrice de transition d'un graphe probabiliste est égale à 1.
Une telle matrice est dite stochastique.

Exercice 1

Compléter le graphe probabiliste suivant en indiquant les poids manquants puis construire sa matrice de transition.



II - Chaines de Markov

II.1 - Définitions

Définition 4

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans un même ensemble E .

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si :

$$\forall (i_0, \dots, i_{n-1}), i, j \in E^{n+2}, \quad P_{(X_0=i_0) \cap \dots \cap (X_{n-1}=i_{n-1}) \cap (X_n=i)}(X_{n+1}=j) = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$$

La chaîne de Markov est dite homogène si les probabilités $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ ne dépendent pas de n .

Remarque 3

Une chaîne de Markov est un processus sans mémoire : le futur (X_{n+1}) ne dépend que du présent (X_n) et pas du passé $(X_{n-1}, \dots, X_0)$.

Définition 5

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E .

- Les éléments de E s'appellent les états de la chaîne de Markov.
Si une chaîne de Markov comporte N états, on les numérote entre 1 et N : $E = \llbracket 1; N \rrbracket$.
- On dit que la chaîne est dans l'état $i \in E$ à l'instant k si et seulement si l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé.

Définition 6

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$.

On appelle k -ième état probabiliste de la chaîne le vecteur ligne $V_k \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ défini par

$$V_k = (P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad \dots \quad P(X_k = N))$$

Le k -ième état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représente donc la loi de X_k sous forme de vecteur ligne.

Pour $k = 0$, V_0 s'appelle l'état initial de la chaîne.

Définition 7

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$.

La matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la matrice $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \dots & p_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) & \dots & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=N) \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) & \dots & P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{(X_n=N)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=N)}(X_{n+1}=2) & \dots & P_{(X_n=N)}(X_{n+1}=N) \end{pmatrix}$$

où le coefficient $p_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ est la probabilité de transition de l'état i à l'état j .

Définition 8

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$ et de matrice de transition $A = (p_{i,j})$.

On appelle graphe associé à A le graphe probabiliste à N sommets tel que le poids de l'arc orienté qui permet de passer du sommet i au sommet j est $p_{i,j}$.

II.2 - Convergence d'une chaîne de Markov

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$.

- Par application de la formule des probabilités totales, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket, \quad P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^N P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j) P(X_k = i) = \sum_{i=1}^N p_{i,j} P(X_k = i)$$

- Si $A = (p_{i,j})$ est la matrice de transition de la chaîne et $V_k = (P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad \dots \quad P(X_k = N))$ son k -ième état probabiliste, cette formule se réécrit alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = V_k \cdot A$$

Remarque 4

Attention à l'ordre des matrices (multiplication à gauche), le vecteur V_k étant une matrice ligne.

Proposition 2 : *A redémontrer à chaque fois*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$ et de matrice de transition A .
Le k -ième état probabiliste de la chaîne est donnée par :

$$V_k = V_0 \cdot A^k$$

Remarque 5

Ce résultat doit être redémontré à chaque fois, la preuve étant une récurrence simple.

Définition 9

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$ et de matrice de transition A .
Soit $U = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
On dit que U est un état stable (ou stationnaire) de la chaîne de Markov si et seulement si

$$\begin{cases} U \text{ vérifie la relation } U \cdot A = U \\ \text{et } U \text{ définit une loi de probabilité, i.e : } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n u_i = 1 \end{cases}$$

Méthode 1

Pour obtenir les éventuels états stables d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrice de transition A :

- On cherche $V = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ solution du système $X \cdot A = X$.
- Si possible, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $U = \alpha V$ vérifie $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \alpha v_i = 1$.

Si c'est impossible, on conclut que la chaîne n'a pas d'état stable.

Remarque 6

La résolution du système $X \cdot A = X$ revient à chercher le sous-espace propre de la matrice tA associé à la valeur propre 1. En effet, $X \cdot A = X \iff {}^t(XA) = {}^tX \iff {}^tA^tX = {}^tX$.

Théorème 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \llbracket 1; N \rrbracket$ et de matrice de transition A .
Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z , i.e $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i) = P(Z = i)$, alors le vecteur $U_Z = (P(Z = 1) \quad P(Z = 2) \quad \dots \quad P(Z = N))$ est un état stable de la chaîne.

II.3 - Un exemple complet

Exercice 2

Ugho (le nom a été changé pour des raisons de respect de la vie privée) aime jouer avec son look. Il a dans ses tiroirs un lot de perruques punk (allant de la houppette rose fluo à la tignasse multicolore à paillette) ainsi qu'une collection de piercing et autres anneaux folkloriques. Chaque matin, il choisit soit une perruque (look 1), soit un piercing (look 2), soit, dans les jours de grande forme, le combo explosif perruque/piercing (look 3). Cependant ce côté déluré de sa personnalité cache une certaine rigidité qui le fait choisir son style suivant des règles très précises décrites ci-dessous.

- Le premier jour, chaque look a la même probabilité d'être choisi.
- Le look 1 étant le moins populaire auprès de ses camarades, Ugho ne le choisit jamais deux jours de suite.
- Si Ugho a choisit un certain jour le look 1, il choisira au hasard le look 2 ou le look 3 le jour suivant.
- Si Ugho a choisi le look 2 ou le look 3 un certain jour, il y a une chance sur deux qu'il change de look le jour suivant et dans ce cas, autant de chance de choisir un des deux autres.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le look choisi par Ugho le n -ième jour.

- Quelle est la loi de X_1 ?
- Justifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
- Représenter le graphe ainsi que la matrice de transition A associés à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le n -ième état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$.

- Justifier soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_{n+1} = V_n A$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = V_1 A^{n-1}$.
- Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un état stable et le déterminer.
- On admet que A est diagonalisable et que : $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer rigoureusement comment obtenir le vecteur ligne V_n qui représente le n -ième état probabiliste de la chaîne.
- On obtient après calculs :

$$V_n = \frac{1}{30} \left(6 + 4 \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad 12 - 2 \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad 12 - 2 \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right)$$

Pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note $z_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$.
Déterminer z_i pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et vérifier que $(z_i)_{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$ définit une loi de probabilité qui correspond à l'état stable de la chaîne de Markov.

Remarque : Si on note Z une variable aléatoire ayant pour loi de probabilité $(z_i)_{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$, on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Z .