

Convergence et approximation

I - Loi faible des grands nombres

I.1 - Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire (discrète ou à densité) à valeurs positives et admettant une espérance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

Exercice 1

Montrer l'inégalité de Markov (démonstration à retenir).

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre k (avec $k \in \mathbb{N}^*$).

Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^k)}{\varepsilon^k}.$

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X est une variable aléatoire (discrète ou à densité) admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exercice 3

Montrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (démonstration à retenir).

Exercice 4

Soit B la variable aléatoire comptant le nombre de buts par match d'une légende du football (aujourd'hui reconverti dans l'enseignement). Les statistiques monstrueuses de ce joueur permettent de supposer que $E(B) = 5$ et $V(B) = 2$.

- En écrivant l'évènement $|B - 5| \geq 4$ comme union de deux évènements, montrer que : $P(B \leq 1) \leq P(|B - 5| \geq 4)$.
- En déduire, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la probabilité que ce géant du football marque moins d'un but lors d'un match est majorée par $1/8$.

I.2 - Loi faible des grands nombres

Théorème 3 : La loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2 . On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 5

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer la loi faible des grands nombres.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p (avec $p \in [0, 1]$) : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\bar{X}_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$

Ce résultat justifie à posteriori notre façon d'introduire la notion de probabilité, c'est-à-dire comme étant la limite de la fréquence d'apparition d'un événement.

II - Convergence en loi

II.1 - Définition et premières propriétés

Définition 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n . Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition.

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable X (et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si

$$\text{pour tout } t \text{ où } F_X \text{ est continue : } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t).$$

Remarque 1

Pour étudier la convergence en loi, on commence par fixer t (un point de continuité de F_X) puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

- Soit X une variable aléatoire à densité. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = e^{1/n} X$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.
- Soit $a > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de fonctions de répartitions données par :

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{x^2}{2n}\right) & \text{si } 0 \leq x < 2n \\ 1 & \text{si } x \geq 2n \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à déterminer.

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers la variable aléatoire X . Alors, pour tous points a et b de continuité de F_X tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b)$$

II.2 - Convergence en loi dans le cas de variables discrètes

Théorème 4

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs entières ($X_n(\Omega) \subset \mathbb{Z}$). Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières ($X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$). Alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X ssi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

II.3 - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Théorème 5

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

En pratique, si p est petit et n grand, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé : $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ puis montrer le théorème 5.

III - Théorème limite central

III.1 - Variable centrée réduite associée à une variable X

Proposition 2

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance non nulle. La variable $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est appelée la variable centrée réduite associée à X . La variable aléatoire X^* vérifie : $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.

Exercice 10

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi, de même espérance m et de même variance σ^2 non nulle. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.
Montrer que : $S_n^* = M_n^*$.

III.2 - Théorème limite central

Théorème 6 : *Le théorème limite central*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi, de même espérance m et de même variance σ^2 non nulle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Alors, les suites $(S_n^*)_{n \geq 1}$ et $(M_n^*)_{n \geq 1}$ convergent en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.

$$S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} N \quad \text{avec } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad M_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} N \quad \text{avec } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Méthode 1

Avec les notations précédentes, le théorème limite central permet d'obtenir une approximation de la probabilité $P([a \leq S_n \leq b])$ en écrivant, pour n assez grand ($n \geq 30$ dans la pratique) :

$$P([a \leq S_n \leq b]) = P\left(\left[\frac{a - nm}{\sqrt{n} \sigma} \leq S_n^* \leq \frac{b - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right]\right) \approx P\left(\left[\frac{a - nm}{\sqrt{n} \sigma} \leq N \leq \frac{b - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right]\right) \quad \text{où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi :

$$P([a \leq S_n \leq b]) \approx \Phi\left(\frac{b - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right).$$

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([-1/2, 1/2])$.
Montrer que : $\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ avec $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

III.3 - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Une loi binomiale pouvant s'écrire comme une somme de loi de Bernoulli identiques et indépendantes, on peut lui appliquer le théorème central limite, ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 7

Soit $p \in]0; 1[$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires telle que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Alors, la suite $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
En pratique : Pour n assez grand, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$.

Remarque 2 (*Correction de continuité*)

Si S_n suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec n et p tels que l'on peut approcher S_n par une loi normale $N_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, npq)$, on devrait écrire :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(S_n = k) \approx P(N_n = k)$$

mais comme N_n est une variable à densité, on a $P(N_n = k) = 0$, donc notre approximation ci-dessus n'est pas bonne.
On utilise alors une correction de continuité en écrivant :

$$P(S_n = k) \approx P(k - 0,5 < N_n < k + 0,5)$$

Exercice 12

On tire 3600 fois un dé équilibré et on note S_{3600} le nombre de 6 obtenus. Évaluer, à l'aide du théorème limite central, la probabilité que le nombre d'apparition du 6 soit compris entre 590 et 610. (On donne $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,44$).

III.4 - Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Une loi de Poisson pouvant s'écrire comme une somme de loi de Poisson identiques et indépendantes (par stabilité des loi de Poisson), on peut lui appliquer le théorème central limite, ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires telle que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$. Alors la suite $S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
En pratique : Pour λ assez grand, on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.