

Comparaison de fonctions, développements limités

On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Ainsi, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ signifie que $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ ou $a = +\infty$.
On appelle voisinage de a un intervalle (ouvert) contenant a .

I - Comparaison de fonctions

I.1 - Fonctions négligeables

Définition 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a .
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f(x) = o(g(x))$ (ou $f = o(g)$) ssi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left(\text{ou de manière équivalente } f(x) = g(x)\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0. \right)$$

Exercice 1

Que peut-on dire de la fonction f au voisinage de 0 si $f(x) = o(1)$? si $f(x) = 1/2 + o(1)$?

Proposition 1 : Croissances comparées

• Au voisinage de $+\infty$, on a, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\bullet x^\alpha = o\left(x^\beta\right) \text{ avec } 0 < \alpha < \beta \quad \bullet x^\alpha = o\left(e^x\right) \quad \bullet e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \bullet \ln(x) = o\left(x^\alpha\right)$$

• Au voisinage de 0, on a, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\bullet x^\beta = o\left(x^\alpha\right) \text{ avec } 0 < \alpha < \beta \quad \bullet \ln(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Exercice 2

a) Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité, au voisinage de $+\infty$.

$$\ln(x); \quad e^x; \quad \frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{\ln(x)}; \quad \sqrt{x}; \quad e^{-x}; \quad x^2; \quad \frac{1}{x}; \quad x$$

b) Montrer que : $e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Proposition 2 : Règles de calcul

On considère des fonctions f, g et h définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Transitivité : Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors : $f = o(h)$.
- Linéarité : Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f + \beta g = o(h)$.
- On a : $g \cdot o(h) = o(gh)$. On peut "rentrer" une fonction dans un petit- o .
- On a : $\forall \beta \in \mathbb{R}^*, o(\beta g) = o(g)$. On peut donc ignorer les constantes dans un petit- o .

Exercice 3

On considère les fonctions suivantes au voisinage de 0 : $f(x) = x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3)$.
Écrire le plus simplement possible les expressions de : $\frac{f(x)}{2x}$, de $g(x) - 2xf\left(\frac{x}{2}\right)$ et de $f(x) + g(x)$.

I.2 - Fonctions équivalentes

Définition 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a .
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f(x) \sim_a g(x)$ (ou $f \sim_a g$) ssi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Attention

Une fonction non nulle au voisinage de a n'est jamais équivalente à 0 au voisinage de a .

On ne peut donc jamais écrire $f \sim 0$.

Si cela arrive, c'est dû à une erreur de manipulation des équivalents.

Proposition 3

Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré en 0.

Proposition 4

- Une caractérisation par les petit- o :

$$f \sim_a g \iff f = g + o(g).$$

- La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables **dans une somme**. Ainsi :

$$f + o(f) \sim_a f.$$

Exercice 4

Déterminer un équivalent simple de $x - \ln(x)$ en $+\infty$ et en 0^+ et de $\frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)$ en 0.

Proposition 5 : Opérations sur les équivalents

On considère des fonctions f, g et h définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Symétrie : $f \sim_a g \iff g \sim_a f$. **Attention** : Ce résultat est faux pour les o .
- Transitivité : Si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors : $f \sim_a h$.
- On peut multiplier, diviser, élever à la puissance des équivalents.
 - ★ Multiplication : Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors : $fh \sim_a gk$.
 - ★ Quotient : Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors : $\frac{f}{h} \sim_a \frac{g}{k}$.
 - ★ Puissance : Si $f \sim_a g$ et $k \in \mathbb{N}$, alors : $f^k \sim_a g^k$.

Exercice 5

- Déterminer un équivalent de : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2}$ en $+\infty$ puis en 0^+ .
- Déterminer un équivalent de : $g(x) = \ln(x)(2x^2 + e^{-x})^2$ en $+\infty$.

Attention

On ne peut ni sommer, ni composer les équivalents en général.

- On a : $x+2 \underset{+\infty}{\sim} x+1$ et $-x \underset{+\infty}{\sim} -x$. En sommant, on obtient : $2 \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui est faux!
- On a : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$. En composant par exp, on obtient : $e^{x+1} \underset{+\infty}{\sim} e^x$ ce qui est faux car $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e \not\underset{+\infty}{\sim} 1$.

Théorème 1 : Équivalents et limites

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a .

- Soit ℓ est un réel **non nul**. Alors :

$$f(x) \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

- Deux fonctions équivalentes en a ont même limite en a (lorsqu'elle existe) :

$$\text{Si } f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Attention

La réciproque du second point est fausse!
Deux fonctions peuvent avoir même limite (infinie ou nulle) sans pour autant être équivalentes.
Un équivalent est plus précis qu'une limite : il précise la vitesse de convergence vers cette limite.
Par exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ mais $e^x \not\underset{\infty}{\sim} x^2$.
Ces deux fonctions tendent toutes deux vers $+\infty$ mais pas à la même vitesse.

Exercice 6

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 - \ln(x) = ?$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}} = ?$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{\ln(x)} = ?$

Proposition 6

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

La proposition précédente permet d'obtenir les équivalents classiques suivants :

Proposition 7 : Équivalents classiques

Au voisinage de 0 :

- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$
- $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ pour α **constante** non nulle

Remarque 1

On retrouve ainsi des limites classiques comme : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

Remarque 2

- Comme $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$ au voisinage de zéro, on en déduit que $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$ au voisinage de 1.
- La relation $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ donne avec $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équivalent : $\sqrt{1 + x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$.

Exercice 7

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x^2}}{\ln(1 + x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 8

Montrer que : $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$.

II - Comparaison de suites

Contrairement aux fonctions, on ne peut comparer deux suites que pour n tendant vers $+\infty$.

Définition 3 : Suite négligeable devant une autre suite

Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles.
On suppose que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que u est négligeable devant v (en $+\infty$), et on note $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Définition 4 : Suites équivalentes

Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles.
On suppose que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que u est équivalente à v (en $+\infty$), et on note $u_n \sim v_n$ ou $u \sim v$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Proposition 8

- Une caractérisation par les petit- o :

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

- La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi :

$$u_n + o(u_n) \sim u_n.$$

Théorème 2 : Équivalents et limites

Si les suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ sont équivalentes, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire :

- Si $u_n \sim v_n$ et si $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge également vers ℓ .
- Si $u_n \sim v_n$ et si $(v_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $\pm\infty$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge également vers $\pm\infty$.

Remarque 3

Les règles de calculs sur les équivalents vu sur les fonctions s'appliquent aux suites.
On ne peut ni sommer ni composer les équivalents en général.
Deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes.

Proposition 9 : Utilisation des équivalents

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors : $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors : $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ pour α **constante non nulle**.

III - Développements limités

III.1 - Définition

Définition 5

On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre 1 au voisinage de** $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + o(x - x_0).$$

En particulier, On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre 1 au voisinage de 0** s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x).$$

Définition 6

On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de** x_0 s'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

En particulier, On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de 0** s'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2).$$

Attention

Les égalités définissant les DL ne sont valables que localement (au voisinage de x_0).

Théorème 3

Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique.

III.2 - Formule de Taylor-Young

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Ces deux égalités sont les formules de Taylor-Young à l'ordre 1 et 2.

Théorème 4 : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^2$) au voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) au voisinage de 0 donnés par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) \quad \text{et} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Remarque 4

On retrouve l'équation de la tangente à la courbe en 0 sur les deux premiers termes de ces formules.

Exercice 9

En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

III.3 - Développements limités des fonctions usuelles

Théorème 5 : DL usuels au voisinage de 0

On a, au voisinage de 0 :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$ avec α constante réelle non nulle.

Remarque 5

On peut en déduire par exemple les DL suivants au voisinage de 0 :

- $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Remarque 6

Les opérations d'addition et de composition qui sont interdites pour les équivalents sont possibles avec les développements limités. Lorsqu'un calcul d'équivalent ou de limite n'aboutit pas, il faut penser à utiliser des développements limités.

Exercice 10

a) Déterminer l'équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

III.4 - Application : Position d'une courbe par rapport à une tangente

Proposition 10

Soit f une fonction définie en 0 et admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2).$$

Alors :

- $a = f(0)$.
- f est dérivable en 0 et $b = f'(0)$.
- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = a + bx$.
- Si $c \neq 0$, on a alors : $f(x) - (a + bx) = cx^2 + o(x^2) \sim c x^2$.

Ainsi, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe $c x^2$ donc par le signe de c .

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{1+x} + 1$.

a) Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f .

b) En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.