

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce cours, n désigne un entier naturel non nul.

I - Rappels

I.1 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de réels.
- Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le n -uplet $(0, \dots, 0)$.
- L'ensemble $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ muni d'une loi interne (l'addition, notée $+$) et d'une loi externe (multiplication par un réel, notée $\cdot$) vérifie certaines propriétés (cf cours ECG1) qui lui confère une structure d'espace vectoriel.
- Une famille de $\mathbb{R}^n$ est un p -uplet $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$ si il existe p réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que : $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$.
- Une famille de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.
- On considère les n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants : $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.2 - Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

- Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs. Cet ensemble s'appelle le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, \dots, e_p)$ et on le note $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaison linéaire : $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y \in F$.
- Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, on dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de F .
- Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ssi pour tout p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de réels, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0)$.
 - ★ Une famille (x) d'un seul vecteur de $\mathbb{R}^n$ est libre ssi $x \neq 0$.
 - ★ Une famille (x, y) de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ssi x et y ne sont pas proportionnels.
- Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur x de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$. Le nombre p de vecteurs d'une base quelconque de F est invariant et s'appelle la dimension de F , notée $\dim(F)$.
- Soit F un espace vectoriel. Une famille libre et génératrice de F est une base de F .
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (la base canonique contient n vecteurs).
- Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
 - ★ Si $\dim(F) = p$, alors $p \leq n$.
 - ★ Si $\dim(F) = p$, alors toute famille libre de F contient au plus p vecteurs.
 - ★ Si $\dim(F) = p$, alors toute famille génératrice de F contient au moins p vecteurs.
 - ★ Si $\dim(F) = p$, alors toute famille libre de F contenant p vecteurs est une base de F .
 - ★ Si $\dim(F) = p$, alors toute famille génératrice de F contenant p vecteurs est une base de F .

II - Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie

On généralise la notion d'espace vectoriel à d'autres ensembles en établissant une correspondance avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, on considère un ensemble E sur lequel sont définies deux opérations :

- une loi de composition interne, notée $+$:
$$+ : \begin{matrix} E \times E & \rightarrow & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \rightarrow & \vec{u} + \vec{v} \end{matrix}$$
- une loi de composition externe, notée $\cdot$:
$$\cdot : \begin{matrix} \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \rightarrow & \lambda \cdot \vec{u} \end{matrix}$$

On note alors $(E, +, \cdot)$ cet ensemble muni de ces deux opérations.

Définition 1

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension n si il existe une bijection ϕ de E dans $\mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires, i.e telle que :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(\vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{y})$$

Proposition 1 : Vecteur nul

L'antécédent du vecteur nul $(0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ par ϕ s'appelle le vecteur nul de E , noté $\vec{0}_E$. Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0}_E = \vec{x}$.

Remarque 1

- Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés vecteurs. Ils seront notés $\vec{x}$ dans ce cours. Cependant, lorsqu'aucune confusion n'est possible, ils sont simplement notés x sans la flèche.
- Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires.
- Tout espace vectoriel contient au moins le vecteur nul. Ainsi, un ensemble ne contenant pas le vecteur nul ne peut pas être un espace vectoriel.
- Attention à bien faire la distinction entre le vecteur nul $\vec{0}_E$ de E (souvent noté 0) et le réel 0.

Les propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (vues en première année) "se transmettent" à l'espace vectoriel E via les propriétés de la bijection ϕ .

Proposition 2 : Règles de calcul

Soit E un espace vectoriel. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$.

- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ et $\lambda \vec{0}_E = \vec{0}_E$
- $\lambda(-\vec{u}) = (-\lambda) \vec{u} = -\lambda \vec{u}$
- $\lambda \vec{u} = \vec{0}_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E$
- $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \vec{u} - \lambda \vec{v}$

III - Espaces vectoriels usuels

Les seuls espaces vectoriels au programme sont les suivants, munis de leurs opérations usuelles. Il en existe évidemment bien d'autres !

Notation	Description
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	Ensemble des n -uplets de réels (notation : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$)
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$	Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$	Ensemble des matrices carrées de taille n (cas particulier du précédent)
$(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$	Ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

III.1 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Proposition 3

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n .

III.2 - L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.
L'utilisation de la définition 1 avec l'application : $\phi : M_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{np}$ qui à une matrice A associe le np -uplet composé des np coefficients de A donne le résultat suivant.

Proposition 4

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np .

En particulier

Proposition 5

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 .

III.3 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

On munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme nul (dont tous les coefficients sont nuls).
L'utilisation de la définition 1 avec l'application : $\phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ qui à un polynôme P associe le $(n+1)$ -uplet composé des $(n+1)$ coefficients de P donne le résultat suivant.

Proposition 6

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Dans toute la suite du cours, E désigne un espace vectoriel.

IV - Familles de vecteurs et sous-espace vectoriel

IV.1 - Familles de vecteurs, combinaisons linéaires

Définition 2 : Famille de vecteurs

Une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E est un n -uplet $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ où les $\vec{v}_i$ sont des vecteurs de E .

Exemple 1

- $((1, 2), (2, 3), (3, 4))$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
- $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ est une famille d'un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $(X^2 + 1, X, X^3)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ mais aussi de $\mathbb{R}_5[X]$.

Définition 3 : Combinaison linéaire

Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E .
On dit que le vecteur $\vec{x}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ s'il existe n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (appelés coefficients) tels que :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Exercice 1

- Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
- Écrire le vecteur $(4, 2)$ comme combinaison linéaire de $(2, -1)$ et $(3, 1)$.
- Le polynôme $P(X) = 3X^2 + X$ est-il une combinaison linéaire de $Q(X) = X^2$ et $R(X) = 2X + 1$?

IV.2 - Sous-espace vectoriel

Définition 4 : Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.
Un sous-espace vectoriel F de E est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille finie $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de E .
On le note alors $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

$$F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{ \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \}.$$

$F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ s'appelle le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

Remarque 2

- La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ contient un nombre fini p de vecteurs.
Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ contient une infinité de vecteurs.

Exercice 2

- Expliciter le sous-espace vectoriel engendré $\mathcal{E}$ par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Est-ce que $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$?

Exemple 2

- Lorsque la famille est réduite à un vecteur, on parle de droite vectorielle.
 - $F_1 = \text{Vect}((1, -2, 1)) = \{ \alpha(1, -2, 1), \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (\alpha, -2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, -2, 1)$.
- Lorsque la famille est composée de deux vecteurs non proportionnels, on parle de plan vectoriel.
 - $F_2 = \text{Vect}((1, -2, 1), (0, 1, -1)) = \{ (\alpha, -2\alpha + \beta, \alpha - \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -2, 1)$ et $(0, 1, -1)$.

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est un espace vectoriel.

Méthode 1

Si l'on arrive à écrire l'ensemble F sous forme de sous-espace engendré : $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$, on peut directement conclure que F est un espace vectoriel. On écrira :
 F est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ donc c'est un espace vectoriel.

Exercice 3

- Montrer que l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & x+2y \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un espace vectoriel en l'écrivant sous forme de sous-espace engendré.

Proposition 7 : Opérations sur les sous-espaces engendrés

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

1. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels avec $\lambda_1 \neq 0$, alors : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \text{Vect}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\right)$.
2. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels non nuls, alors : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{Vect}(\lambda_1 \vec{v}_1, \dots, \lambda_n \vec{v}_n)$.
3. Si $\vec{v}_n$ est combinaison linéaire de $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$, alors : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_n) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$.
4. En particulier, si $\vec{v}_n = \vec{0}$, alors : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$.

Remarque 3

Ce résultat montre que dans un sous-espace engendré par une famille, on peut supprimer des vecteurs redondants sans changer le sous-espace engendré.

Exercice 4

1. Montrer que : $\text{Vect}((4, 0, -2); (1, 2, -1); (-3; 2; 1)) = \text{Vect}((2, 0, -1); (1, 2, -1))$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .
Montrer que : $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4; e_2 + e_3; 2e_2 + 2e_3) = \text{Vect}(e_1 + e_4; e_2 + e_3)$.

IV.3 - Familles génératrices**Définition 5**

Soit F un espace vectoriel.

Une famille finie $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de F est dite génératrice de F ssi $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

Ainsi, tout élément $\vec{u}$ de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$:

$$\forall \vec{u} \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i.$$

Remarque 4

- Un espace vectoriel admet une infinité de famille génératrice.
- Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est une famille génératrice de F , on dit aussi que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ engendre F .
- Une famille génératrice de F peut être vue comme un résumé de l'information contenue dans F , puisque les vecteurs de cette famille permettent d'atteindre n'importe quel vecteur de F .

Méthode 2 : Obtenir une famille génératrice d'un sous espace vectoriel

On définit souvent un sous ensemble F de E comme un ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E qui vérifient une certaine propriété $\mathcal{P}$:

$$F = \left\{ \underbrace{\vec{u} \in E}_{\textcircled{1}} \mid \underbrace{\vec{u} \text{ vérifie } \mathcal{P}}_{\textcircled{2}} \right\}.$$

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , on peut chercher une famille génératrice de F de manière à pouvoir écrire $F = \text{Vect}(\dots)$. Pour cela, il faut décrire F de manière explicite.

- On traduit explicitement la condition $\textcircled{1}$.
Par exemple $P \in \mathbb{R}_2[X] \iff P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ comme paramètres.
- On traduit explicitement la condition $\textcircled{2}$ ce qui donne des conditions sur les paramètres (a, b, c) .
Par exemple : $P \in F \iff \dots (\text{calculs}) \dots \iff a = 0 \text{ et } c = b$.
- On peut alors décrire F explicitement.
Par exemple : $P \in F \iff P(X) = bX + b = b(X + 1)$.
Donc $F = \text{Vect}(X + 1)$ est un espace vectoriel engendré par la famille $(X + 1)$.

Exercice 5

Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

1. $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$
2. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P - XP' = 0\}$.

Proposition 8

Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une famille génératrice de E , alors :

1. Si on change l'ordre des vecteurs de la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ alors la famille reste génératrice de E .
2. Pour tout $\vec{u} \in E$, la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{u})$ est encore génératrice de E .
3. Si $\vec{v}_n$ est combinaison linéaire de $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$ alors la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$ reste génératrice de E .

Remarque 5

Le dernier point de cette proposition permet de construire une famille génératrice de cardinal minimal, ce qui sera essentiel pour construire une base d'un espace vectoriel.

Exercice 6

Montrer que la famille $((1, 0); (0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ puis en déduire que la famille $((1, 1); (-1, 1))$ est également génératrice de $\mathbb{R}^2$.

IV.4 - Une caractérisation des sous-espace vectoriels**Proposition 9**

Soit E un espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ssi :

1. F est un sous-ensemble non vide de E : $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$.
2. Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de F , le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ appartient à F .
3. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de F et tout réel λ , le vecteur $\lambda \vec{u}$ appartient à F .

Dans la pratique, c'est la caractérisation équivalente suivante qu'on utilise.

Proposition 10 : Caractérisation.

Soit E un espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ssi :

1. $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$ (on montre que $\vec{0}_E \in F$).
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} + \lambda \vec{v} \in F$.

Méthode 3

Un sous-ensemble F de E est souvent défini comme l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E qui vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$. Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E

- On montre que $\vec{0}_E \in F$, c'est-à-dire que $\vec{0}_E$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
- On choisit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de F , donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient la propriété $\mathcal{P}$.
On montre alors que le vecteur $\vec{u} + \lambda \vec{v}$ vérifie aussi la propriété $\mathcal{P}$ donc qu'il appartient à F .

Exercice 7

1. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ (noyau de A).
Montrer que $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a un réel fixé et E_a l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'annulent en a .
Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.5 - Familles libres

Définition 6

- Une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de E est dite libre ssi pour tout p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ on a :
$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}\right) \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0).$$
- Une famille qui n'est pas libre est dite liée :
Ainsi, la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est liée ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

Remarque 6

- Lorsqu'une famille est libre on dit aussi que ses vecteurs sont linéairement indépendants.
- Si un des vecteurs d'une famille est combinaison linéaire des autres, alors cette famille est liée.
- Lorsque $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$, on dit que les λ_i sont non tous nuls.

Méthode 4

L'égalité vectorielle $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ a une signification particulière en fonction de l'espace E et contient beaucoup d'informations. L'exploitation de cette égalité vectorielle permet d'obtenir un système d'équations d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ que l'on peut alors résoudre.

Exercice 8

- Montrer que la famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-2, 7, -6))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
- Justifier que la famille $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est une famille liée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 11

- La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est liée ssi l'un des $\vec{u}_i$ est égal à une combinaison linéaire des autres.
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
- Toute famille contenant le vecteur nul, deux vecteurs égaux ou deux vecteurs proportionnels est liée.

Proposition 12 : Famille de deux vecteurs

- La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
On dit alors que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires (proportionnels).
- En particulier, une famille de deux vecteurs non colinéaires est libre.

Proposition 13 : Famille d'un seul vecteur

La famille $(\vec{u})$ est libre ssi $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Exercice 9

- La famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3))$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$?
- La famille $((3, 3, 3))$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$?

Le résultat suivant n'est pas explicitement au programme mais peut être utilisé.

Proposition 14 : Famille de polynômes de degrés échelonnés

Toute famille $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ de polynômes de $R_n[X]$ de degrés échelonnés est libre.

V - Base et dimension

V.1 - Définition

Définition 7 : Base d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$:
$$\text{Pour tout } \vec{u} \in E, \text{ il existe } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ unique tel que : } \vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Les λ_i s'appellent les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$.

Attention

L'ordre est important dans l'écriture des vecteurs d'une base.
Ainsi, deux bases constituées des mêmes vecteurs mais dans un ordre différent ne sont pas les mêmes. En particulier, les coordonnées d'un même vecteur seront différentes dans ces deux bases.

Exercice 10

- Déterminer les coordonnées du vecteur $(7, 4, 1)$ dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer le polynôme P de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1; (X - 1); (X - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Soit E un espace vectoriel admettant pour base la famille : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Écrire la matrice colonne des coordonnées du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_4$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

V.2 - Obtention d'une base

Dans la pratique, on montre qu'une famille est une base d'un espace vectoriel avec la caractérisation suivante.

Proposition 15

Soit E un espace vectoriel et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E .
La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E ssi elle est libre et génératrice de E .

Méthode 5

Pour trouver une base d'un espace vectoriel E donné.

- On détermine une famille génératrice de E en écrivant E sous la forme $E = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
 - Si la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre, c'est donc une base de E .
 - Si la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ n'est pas libre, on supprime un vecteur de cette famille génératrice et on réitère le procédé jusqu'à obtenir une famille libre.
- La famille réduite ainsi obtenue est libre et génératrice de E ; c'est donc une base de E .

Exercice 11

- Soit $e_1 = (1, 2, -3)$, $e_2 = (-2, 0, 5)$ et $e_3 = (0, 4, -1)$. Trouver une base de $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.
- Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base $\mathcal{B}$.

V.3 - Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel admettant une base. Alors, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de l'espace vectoriel E et est noté : $\dim(E)$.
Par convention on dira que l'espace vectoriel $E = \{0\}$ est de dimension 0.

Exercice 12

Montrer que l'ensemble $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel puis en déterminer une base et sa dimension.

V.4 - Bases canoniques

Les espaces vectoriels usuels admettent des bases naturelles appelées bases canoniques.

V.4.a - Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Proposition 16

On définit, pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le vecteur $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème place}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ que l'on appelle *base canonique de $\mathbb{R}^n$* .

- La famille $((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

V.4.b - Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Proposition 17

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on appelle *base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$* .

- La famille $(1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- La famille $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

V.4.c - Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 18

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on définit la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui lui vaut 1.
La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on appelle *base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$* .

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

V.4.d - Dimensions des espaces vectoriels usuels

On rappelle ces résultats importants vus en début de chapitre.

Théorème 3 : *Dimensions des espaces vectoriels usuels (à connaître par cœur)*

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$. En particulier : $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

V.5 - Familles de vecteurs et dimension

Proposition 19

Soit E un espace vectoriel de dimension n : $\dim(E) = n$.

- Toute famille libre possède au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

Remarque 7

Dans un espace de dimension n , toute famille comportant plus de n vecteurs est donc forcément liée et toute famille comportant moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice.

Exercice 13

1. La famille $\mathcal{F}_1 = ((1, 2); (2, 1); (1, 1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?
2. La famille $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 1); (1, 2, 1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n : $\dim(E) = n$.

- Toute famille libre de E composée de n vecteurs est une base de E .
- Toute famille génératrice de E composée de n vecteurs est une base de E .

Méthode 6

Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace et que l'on se donne une famille de n vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est soit libre, soit génératrice pour montrer que c'est une base. Comme on a le choix, on préférera montrer que la famille est libre (plus simple).
On écrira par exemple : "La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre composée de n vecteurs de E qui est de dimension n , donc c'est une base de E ."

Exercice 14

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}_1 = ((4; -1; 0); (0; 2; 2); (1; -1; -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{F}_2 = (1; X - 1; (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

V.6 - Dimension des sous-espaces

Théorème 5

- Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors : $\dim F \leq \dim E$.
- Cas d'égalité. Si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Exercice 15

Soit $\mathcal{F} = \text{Vect}((1, 2), (2, 1))$. Montrer que $F = \mathbb{R}^2$.

V.7 - Rang d'une famille de vecteurs

Définition 8

Soit E un espace vectoriel et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E .
On appelle rang de la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, noté $\text{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la dimension de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Ainsi :

$$\text{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \dim(\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)).$$

Exercice 16

On considère la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (1, 3, -3)$, $\vec{v} = (4, 2, -3)$ et $\vec{w} = (-1, 7, -6)$.
Calculer : $-3\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ puis en déduire le rang de la famille $\mathcal{F}$.

V.8 - Rang d'une matrice

Définition 9 : Rang d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_p \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice .

On appelle rang de la matrice A , noté $\text{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $(C_1, C_2, \dots, C_p)$. Ainsi :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p).$$

Exercice 17

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$