

Suites numériques - Bilan

I - Bilan de première année

I.1 - Généralités

- ☐ Monotonie.
 - ★ Signe de $u_{n+1} - u_n$ (ou comparaison de u_{n+1} et u_n).
 - ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 : suite croissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et décroissante sinon.
- ☐ Règles de calcul sur les limites (somme, produit, inverse, quotient, composée, croissances comparées).
- ☐ Formes indéterminées : $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; 0^0 .
- ☐ Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et si f est une fonction continue en ℓ , alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.
- ☐ Théorème de prolongement des inégalités à la limite.
 - ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, alors : $(\forall n, u_n \leq v_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 - ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, alors : $(\forall n, u_n < v_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- ☐ Théorème des gendarmes (Théorème d'encadrement).
Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n, v_n \leq u_n \leq w_n$.
Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- ☐ Divergence par minoration.
Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\forall n, u_n \geq v_n$.
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- ☐ Théorème de la convergence monotone (utile pour prouver l'existence d'une limite).
 - ★ Une suite croissante et majorée (resp. décroissante minorée) est convergente.
 - ★ Une suite croissante et non majorée (resp. décroissante non minorée) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- ☐ Suites adjacentes, théorème des suites adjacentes.
 - ★ Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.
 - ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.
- ☐ Si les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

I.2 - Suites classiques

- ☐ Détail des formules et savoir-faire sur la fiche sur les suites.
 - ★ Suites arithmétiques.
 - ★ Suites géométriques.
 - ★ Suites arithmético-géométriques (méthode de résolution).
 - ★ Suites récurrences linéaires d'ordre 2 : u_0, u_1 fixés et $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
 - ★ Sommes finies classiques.
 - ★ Sommes télescopiques (méthode de calcul).

I.3 - Suites récurrence de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Voir le détail des méthodes dans les chapitres suivants de ce cours.

- ☐ L'étude préalable de la fonction f permet de d'obtenir des résultats sur la suite.
- ☐ Définition de la suite.
- ☐ Encadrement (majoration, minoration) de la suite.
- ☐ Monotonie de la suite.
 - ★ Par étude du signe de $f(x) - x$.
 - ★ Si f est croissante : par récurrence avec $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} < u_n$ ou $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} > u_n$.
- ☐ Convergence de la suite.
 - ★ Par théorème des gendarmes.
 - ★ Par le théorème de la convergence monotone.
- ☐ Les limites possibles de la suite sont solutions de l'équation $f(x) = x$.
- ☐ Utilisation de l'IAF.

I.4 - Suites implicites de type : $f_n(x) = C$ ou $f(x) = c_n$

Voir le détail des méthodes dans les chapitres suivants de ce cours.

- ☐ Deux types de suites implicites.
 - ★ x_n unique solution de l'équation $f_n(x) = C$ avec C constante.
La fonction f_n dépend de n , la constante C ne dépend pas de n .
 - ★ x_n unique solution de l'équation $f(x) = c_n$.
La fonction f ne dépend pas de n , la constante c_n dépend de n (souvent $c_n = n$ ou $c_n = 1/n$).
- ☐ Existence de la suite par le théorème de la bijection monotone.
- ☐ Encadrement de la suite : on raisonne sur les images en utilisant la relation $f_n(x) = C$ ou $f(x) = c_n$.
- ☐ Monotonie de la suite : on raisonne sur les images en utilisant la relation $f_n(x) = C$ ou $f(x) = c_n$.
- ☐ Convergence de la suite.
 - ★ Par théorème des gendarmes.
 - ★ Par le théorème de la convergence monotone.
- ☐ Limite de la suite en utilisant la relation $f_n(x) = C$ ou $f(x) = c_n$.

I.5 - Suites définie par une intégrale du type : $I_n = \int_a^b f_n(t) dt$

- ☐ Existence de la suite.
 - ★ Si $f_n(t)$ est continue sur $[a, b]$ (fermé), alors I_n existe.
 - ★ Si I_n est impropre, alors I_n existe ssi l'intégrale est convergente.
- ☐ Variations de la suite par l'étude du signe de $I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(t) - f_n(t) dt$.
 - ★ On travaille sur l'intégrande : signe de $f_{n+1}(t) - f_n(t)$.
 - ★ On intègre en vérifiant l'ordre des bornes ($a < b$).
- ☐ Encadrement de la suite
 - ★ On travaille sur l'intégrande : on encadre d'abord $f_n(t)$.
 - ★ On intègre en vérifiant l'ordre des bornes ($a < b$).
- ☐ On peut souvent obtenir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n par une IPP.
- ☐ Convergence de la suite.
 - ★ Par théorème des gendarmes.
 - ★ Par le théorème de la convergence monotone.

II - Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I et la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par : } \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

II.1 - Préliminaire : Étude de la fonction f

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, les propriétés de la fonction f permettent de déduire des propriétés de la suite u .

Il est donc utile d'étudier la fonction f (monotonie, bornes, ...) et d'utiliser ses propriétés pour l'étude de la suite u .

Remarque 1

Dans les sujets de concours, l'étude de la fonction f fait souvent l'objet d'une première partie qui précède l'étude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il faut donc penser à utiliser les propriétés démontrées sur f pour faciliter l'étude de la suite.

II.2 - Définition et encadrement de la suite

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie si tous ses termes existent donc si il est possible de calculer $f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Souvent, on montre par récurrence que (u_n) est bien définie en montrant que ses termes se trouvent tous dans un intervalle inclus dans le domaine de définition de f .

Méthode 1 : Suite bien définie

On montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "u_n \text{ existe}"$.

Concrètement dans l'hérédité, on montre que $u_{n+1} = f(u_n)$ existe en justifiant que $u_n \in D_f$ par HR.

Par exemple : dénominateur ne s'annulant pas, radical positif dans une racine carrée, logarithme bien défini, ...

Méthode 2 : Encadrement de la suite

On montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n), m \leq u_n \leq M$.

- Si la formule de récurrence est assez simple, on peut montrer ce résultat à la main.
- Sinon, on peut utiliser les variations de la fonction f dans la récurrence.

★ Soit en remarquant que $f([m; M]) \subset [m; M]$ à l'aide du tableau de variations.

★ Soit en appliquant f à l'inégalité $m \leq u_n \leq M$.

Par exemple, si f est croissante :

$$m \leq u_n \leq M \iff f(m) \leq f(u_n) \leq f(M) \iff f(m) \leq u_{n+1} \leq f(M)$$

Il reste alors à vérifier que $m \leq f(m)$ et $f(M) \leq M$ pour obtenir $m \leq u_{n+1} \leq M$.

Remarque 2

- On montre souvent l'existence des termes de la suite et l'encadrement dans la même récurrence.
- Cet encadrement fournit un majorant et/ou un minorant, ce qui pourra être utile pour montrer la convergence de la suite u en utilisant le théorème de la convergence monotone (suite croissante majorée ou décroissante minorée).

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 1$.

II.3 - Monotonie de la suite

II.3.a - Variations de u par l'étude du signe de $x \mapsto f(x) - x$

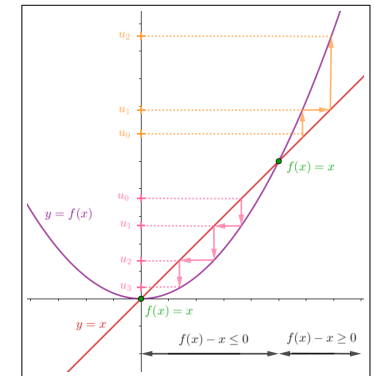
Observant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, montrer que $f(x) - x$ est de signe constant sur un intervalle I permet de connaître les variations de la suite en évaluant en $x = u_n$ à condition que $u_n \in I$.

Méthode 3

- Si $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- On pose $x = u_n$, ce qui donne :
 $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$
donc (u_n) est croissante.
- Si $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- On pose $x = u_n$, ce qui donne :
 $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$
donc (u_n) est décroissante.

Remarque 3

- Si le signe de $f(x) - x$ varie, c'est la position de u_0 qui détermine le sens de variation de (u_n) .
- Ainsi, une même fonction f croissante (ici sur $\mathbb{R}_+$) peut générer, selon le premier terme u_0 , une suite (u_n) croissante ou décroissante.



II.3.b - Variations de u par récurrence lorsque f est croissante

Lorsque f est croissante et que u_0 est connu, on obtient les variations de u en raisonnant par récurrence.

Méthode 4

Comme u_0 est connu, on peut calculer u_1 . Deux cas se présentent alors.

- Si $u_1 \geq u_0$, on montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geq u_n$. Comme f est croissante sur I , si $u_n \in I$ et $u_{n+1} \in I$, on obtient pour l'hérédité :

$$u_{n+1} \geq u_n \iff f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \iff u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

- Si $u_1 \leq u_0$, on montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : u_{n+1} \leq u_n$. Comme f est croissante sur I , si $u_n \in I$ et $u_{n+1} \in I$, on obtient pour l'hérédité :

$$u_{n+1} \leq u_n \iff f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \iff u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

Remarque 4

Le fait que f soit croissante n'implique pas que u sera croissante mais seulement qu'elle sera monotone. Les deux cas (suite croissante ou décroissante) peuvent se produire (Cf figure de la remarque 3).

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto x^2 \ln(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ puis étudier la monotonie de la suite (u_n) .

II.4 - Convergence de la suite

II.4.a - Théorème de la convergence monotone

Théorème 1 : Théorème de la convergence monotone

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Attention

Ce théorème prouve la convergence de la suite mais ne donne pas la valeur de la limite qui n'est pas forcément le majorant (ou le minorant) obtenu.

- Il est faux d'écrire : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers 0.
- Il est correct d'écrire : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite ℓ (dont on déterminera la valeur par d'autres arguments).

II.4.b - Point fixe : candidat éventuel pour une limite finie

Théorème 2

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie l'équation : $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow & n \rightarrow +\infty & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

On dit que ℓ est un point fixe de f .

Remarque 5

- La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle à l'application de ce théorème. Il faut donc le mentionner dans votre rédaction.
- Ce théorème fournit les limites possibles de la suite u (qui sont donc les solutions de l'équation $f(x) = x$) mais il ne prouve pas la convergence de la suite qui doit être montrée séparément.
- Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Méthode 5 : Convergence de la suite u à l'aide des points fixes de f

- On montre (par exemple avec le théorème de la convergence monotone) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ (dont on ne connaît pas la valeur).
- On résout l'équation $f(x) = x$ pour obtenir les valeurs possibles de ℓ .
- Il faut ensuite argumenter pour trouver la bonne valeur de ℓ , au cas par cas.
Par exemple, si on a prouvé que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, on peut éliminer toutes les valeurs strictement négatives.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis montrer (par l'absurde) qu'elle diverge vers $+\infty$.

II.4.c - Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Commençons par un petit rappel sur l'inégalité des accroissements finis (IAF) qui permet de contrôler l'accroissement maximal d'une fonction sur un intervalle.

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ telle que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.
Alors, pour tous $(x, y) \in ([a, b])^2$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Lorsqu'on dispose d'un point fixe ℓ de f ($f(\ell) = \ell$), on peut contrôler les écarts successifs $|u_n - \ell|$ entre les termes u_n de la suite et ce point fixe ℓ (qui est un candidat pour la limite) en utilisant de l'IAF avec $x = u_n$ et $y = \ell$.

Méthode 6 : Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et il existe } q \in]0, 1[\text{ tel que } \forall x \in I, |f'(x)| \leq q \\ \text{Il existe } \ell \in I \text{ tel que } f(\ell) = \ell \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \end{cases}$

Alors :

- Comme $u_n \in I$ et $\ell \in I$, l'inégalité des accroissements finis donne : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq q|u_n - \ell|. \quad \text{soit} \quad |u_{n+1} - \ell| \leq q|u_n - \ell| \quad \text{car } f(\ell) = \ell.$$

- On montre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq q^n |u_0 - \ell|.$$

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ($q \in]0, 1[$), on conclut par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Remarque 6

- L'obtention de l'inégalité $\forall x \in I, |f'(x)| \leq q$ fait souvent l'objet d'une question à part.
- Il est nécessaire que $0 < q < 1$ pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ puis la limite de la suite.
- Il faut bien vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ pour pouvoir appliquer l'IAF pour $x = u_n$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2) = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrer que si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , alors $\ell = \sqrt{2}$.
4. Montrer que : $\forall t \in [1; 2], |f'(t)| \leq \frac{1}{2}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$.
6. En déduire que : $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
7. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

II.5 - Python et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

On étudie avec Python la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in I$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la fonction utilise des fonctions mathématiques (exp, ln,...), il faut importer le module "math".

```
1 from math import * # on importe tout le module math
```

II.5.a - Obtention d'un terme de la suite avec Python

- Programme renvoyant le terme u_n lorsque le premier terme est u_0 .

```
1 n = int(input("valeur de n ?"))
2 u = u0 # u0 est le premier terme de la suite
3 for k in range(1, n+1) : # n passages (range(n) aussi valable)
4     u = f(u) # calcul du terme suivant (f à expliciter)
5 print(u)
```

Remarque 7

- ★ Les termes successifs sont écrasés à chaque passage dans la boucle. Seul le dernier terme calculé est renvoyé par la fonction.
 - ★ Attention ! Si le premier terme est u_1 , il faut faire un tour de moins dans la boucle.
- Fonction renvoyant le terme u_n lorsque le premier terme est u_0 .
Même si l'algorithme est le même, il y a une différence de syntaxe entre programme et fonction.
L'entier n est un paramètre de la fonction (et remplace le rôle de **input** du programme).
Le mot clé **return** permet de renvoyer le résultat souhaité (et remplace le **print** du programme).

```
1 def suite_u(n):
2     u = u0 # u0 est le premier terme de la suite
3     for k in range(1, n+1) : # n passages (range(n) aussi valable)
4         u = f(u) # calcul du terme suivant (f à expliciter)
5     return u
```

II.5.b - Obtention de la liste de termes de la suite avec Python

- Méthode 1 : On construit une liste au fur et à mesure (méthode "append").

```
1 def termes_u(n):
2     u = u0
3     L = [u0] # initialisation de la liste avec u0
4     for k in range(n) : # n passages
5         u = f(u) # calcul du terme suivant
6         L.append(u) # on ajoute ce terme en fin de liste
7     return L # on renvoie la liste contenant tous les termes
```

- Méthode 2 : On construit une liste de taille $(n+1)$ remplie de 0 et on modifie ses valeurs au fur et à mesure. Pour utiliser les listes Python, on importe le module "numpy".

```
1 import numpy as np
```

```
1 def termes_u(n):
2     L = np.zeros(n+1) # création d'une liste contenant (n+1) 0
3     L[0] = u0 # on range u0 dans la case 0
4     for k in range(n) : # n passages
5         L[k+1] = f(L[k]) # calcul du suivant : L[k] contient u_k
6     return L # on renvoie la liste contenant tous les termes
```

II.5.c - Obtention du premier terme de la suite qui vérifie une condition

Programme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel u_n satisfait une condition.

```
1 n = 0 # on retient l'indice (c'est lui qu'on cherche)
2 u = u0 # premier terme u0
3 while "contraire_condition" : # tant que condition non satisfaite
4     u = f(u) # calcul du terme suivant
5     n = n+1 # on augmente l'indice
6 print(n) # en sortie de boucle, la condition est vraie
```

II.5.d - Représentation graphique de la suite avec Python

Pour tracer des graphiques avec Python, on importe le module "matplotlib.pyplot".

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
```

Pour représenter graphiquement la suite, on donne en abscisses une liste contenant les indices (ici de 0 à 30) et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite (de u_0 à u_{30}).

```
1 N = [k for k in range(31)] # indices en abscisses
2 # la fonction termes_u renvoie une liste des valeurs de la suite
3 U = termes_u(31) # valeurs de la suite en ordonnées (ici 30 termes)
4 plt.plot(N, U) # tracé du graphe
5 plt.show() # affichage du graphe
```

II.5.e - Application de l'IAF : valeur approchée d'une limite avec Python

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite ℓ . On ne connaît pas la valeur de ℓ et on cherche à obtenir une approximation.

On dit que le terme u_n est une valeur approchée de ℓ à ε près si : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

L'utilisation de l'IAF avec les suites récurrentes permet d'obtenir une majoration de cette erreur $|u_n - \ell|$. Par exemple, on a vu dans l'exercice 5 la majoration suivante (avec $\ell = \sqrt{2}$) :

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\star)$$

Comme on ne peut pas calculer $|u_n - \ell|$ (on ne connaît pas ℓ), l'idée est de remarquer que si $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \varepsilon$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ également (d'après $(\star)$).

Pour obtenir une approximation (donnée par u_n) de la valeur de ℓ (inconnue) à ε près, il faut donc calculer les termes successifs de la suite jusqu'à ce que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit plus petit que ε .

- Programme (valable pour l'exemple ci-dessus) permettant d'obtenir une approximation de ℓ à ε près. Remarquer que ℓ n'apparaît pas dans ce programme (il est inconnu!).

```
1 epsilon = float(input("Erreur d'approximation ?"))
2 u = u0 # premier terme
3 n = 0 # indice
4 while (1/2)**n >= epsilon : # 1/2 pour l'exemple ci-dessus)
5     u = f(u) # calcul du terme suivant (f à expliciter)
6     n = n+1 # on augmente l'indice
7 print(u) # valeur approchée
```

Exercice 6

En utilisant la suite (u_n) et l'inégalité $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ obtenue à l'exercice 5, écrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

III - Suites implicites

Définition 1

Une suite implicite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie par une équation (E_n) qui dépend de l'entier n . On trouve deux types de suites implicites.

- x_n est défini comme l'unique solution de l'équation $(E_n) : f_n(x) = C$ avec C constante.
La fonction f_n dépend de n , la constante C ne dépend pas de n . (C est très souvent égal à 0.)
- x_n est défini comme l'unique solution de l'équation $(E_n) : f(x) = c_n$.
La fonction f ne dépend pas de n , la constante c_n dépend de n . (souvent $c_n = n$ ou $c_n = 1/n$).

Remarque 8

Comme l'indique son nom, une suite implicite n'est pas explicite. A priori, elle ne vérifie pas de relation de récurrence et il n'existe pas d'expression en fonction de n .
Les méthodes de la section précédente ne sont donc pas applicables.

La méthode suivante est la base de l'étude des suites implicites.

Méthode 7 : Base de l'étude

La seule information dont on dispose sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est qu'elle est solution de l'équation E_n . Concrètement, cela signifie que l'équation est vérifiée pour $x = x_n$, ce qui donne :

$$f_n(x_n) = C \quad (\text{resp. } f(x_n) = c_n).$$

Il est indispensable d'écrire explicitement cette relation en remplaçant f_n (resp. f) par sa formule pour obtenir des informations sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 9

L'égalité $f_n(x_n) = C$ (resp. $f(x_n) = c_n$) vérifiée par la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le premier cas, on peut par exemple écrire : $f_{n+1}(x_{n+1}) = C$ ou encore $f_{n-1}(x_{n-1}) = C$. Dans le second cas, on peut par exemple écrire : $f(x_{n+1}) = c_{n+1}$ ou encore $f(x_{n-1}) = c_{n-1}$.

III.1 - Existence de la suite

Méthode 8 : Utilisation du théorème de la bijection

Pour montrer que x_n existe pour tout n , on montre à l'aide du théorème de la bijection que l'équation $f_n(x_n) = C$ (resp. $f(x_n) = c_n$) d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution notée x_n . Il est important de préciser l'intervalle image $f_n(I)$ (resp. $f(I)$) pour justifier que $C \in f_n(I)$ (resp. $c_n \in f(I)$) admet un unique antécédent (qui est x_n).

Remarque 10

- Une fois la bijectivité de f_n (resp. f) établie, on peut écrire (de manière théorique) :
$$f_n(x_n) = C \iff x_n = f_n^{-1}(C) \quad (\text{resp. } f(x_n) = c_n \iff x_n = f^{-1}(c_n)).$$
- Il est très utile de dresser le tableau de variation de la fonction f qui va servir de support à l'étude de la suite implicite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi que celui de la fonction réciproque f^{-1} (qui a les mêmes variations que f).
Par exemple, pour $(E_n) : f(x_n) = c_n$ avec f strictement croissante :

x	x_n
$f(x)$	c_n

x	c_n
$f^{-1}(x)$	x_n

III.2 - Encadrement de la suite

L'idée principale à retenir est qu'on doit travailler sur les images $f_n(x_n)$ pour obtenir des informations sur x_n (car ce dernier n'est pas connu).
On décrit la méthode pour $f_n(x_n) = C$. Elle se déduit facilement pour $f(x) = c_n$.

Méthode 9 : Encadrer la suite en travaillant sur les images

Pour obtenir un encadrement du type $a_n \leq x_n \leq b_n$:

- On commence par calculer les images $f_n(a_n)$, $f_n(b_n)$ et on les compare à $C = f_n(x_n)$. On obtient :
$$f_n(a_n) \leq \underbrace{f_n(x_n)}_{=C} \leq f_n(b_n) \quad (\text{si } f_n \text{ est croissante}) \quad \text{et} \quad f_n(a_n) \geq \underbrace{f_n(x_n)}_{=C} \geq f_n(b_n) \quad (\text{si } f_n \text{ est décroissante})$$
- On utilise le sens de variations de f_n pour conclure.
➤ Si f_n est croissante, alors :
$$f_n(a_n) \leq f_n(x_n) \leq f_n(b_n) \iff a_n \leq x_n \leq b_n.$$
- Si f_n est décroissante, alors :
$$f_n(a_n) \geq f_n(x_n) \geq f_n(b_n) \iff a_n \leq x_n \leq b_n.$$

x	a	x_n	b_n
$f_n(x)$	$f_n(a_n)$	$\underbrace{f_n(x_n)}_{=C}$	$f_n(b_n)$

x	a_n	x_n	b_n
$f_n(x)$	$f_n(a_n)$	$\underbrace{f_n(x_n)}_{=C}$	$f_n(b_n)$

Remarque 11

- a_n et b_n peuvent être constants. On obtient un encadrement du type : $a \leq x_n \leq b$.
- Dans le tableau de variations, on place d'abord les images $f_n(a_n)$, $f_n(x_n)$ et $f_n(b_n)$ de manière cohérente puis on en déduit la position relative des antécédents a_n , x_n et b_n .
Ainsi, la relation $a_n \leq x_n \leq b_n$ est la conclusion du raisonnement qui découle de l'obtention de la relation $f_n(a_n) \leq f_n(x_n) \leq f_n(b_n)$ (cas f_n croissante).

III.3 - Monotonie de la suite

Comme on ne peut pas comparer directement x_n et x_{n+1} (inconnus), l'idée est de nouveau de raisonner sur les images $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
On écrit la méthode pour $f_n(x_n) = C$. Elle se déduit facilement pour $f(x) = c_n$.

Méthode 10 : Monotonie de la suite en travaillant sur les images

Pour comparer x_n et x_{n+1} .

- On commence par calculer l'image $f_n(x_{n+1})$ et on la compare avec $C = f_n(x_n)$ (par définition).
Deux cas possibles : soit $f_n(x_{n+1}) \leq C = f_n(x_n)$, soit $f_n(x_{n+1}) \geq C = f_n(x_n)$.
- On utilise les variations de f_n pour conclure. Traitons par exemple le cas : $f_n(x_{n+1}) \leq C = f_n(x_n)$.
➤ Si f_n est croissante, alors :
$$f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) \iff x_{n+1} \leq x_n$$
- Si f_n est décroissante, alors :
$$f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) \iff x_{n+1} \geq x_n$$

x	x_{n+1}	x_n
$f_n(x)$	$f_n(x_{n+1})$	$f_n(x_n)$

x	x_n	x_{n+1}
$f_n(x)$	$f_n(x_n)$	$f_n(x_{n+1})$

III.4 - Convergence de la suite et limite

Il n'y a pas de méthode type mais plusieurs pistes à explorer en fonction des résultats obtenus.

Méthode 11 : Convergence

- L'encadrement de la suite peut parfois permettre d'obtenir, à l'aide du théorème des gendarmes, la convergence et la limite de la suite.
- La monotonie de la suite peut parfois permettre d'obtenir, à l'aide du théorème de la convergence monotone, la convergence de la suite mais pas sa limite.
Une fois l'existence de la limite établie (notée ℓ), on peut alors passer à la limite dans la relation vérifiée par x_n , à savoir $f_n(x_n) = C$ ou $f(x) = c_n$, ce qui donne une équation en ℓ .
- Cas particulier de l'équation (E_n) $f(x_n) = c_n$.
La bijectivité de f donne : $f(x_n) = c_n \iff x_n = f^{-1}(c_n)$.
On peut alors écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(c_n)$$

et obtenir la limite de (x_n) par composition si on connaît la limite de la suite (c_n) et la limite de la fonction f^{-1} .

III.5 - Autres questions

Pour les questions moins classiques sur les suites implicites, la règle d'or est de revenir à la définition et d'écrire explicitement l'égalité $f_n(x_n) = C$ (resp. $f(x_n) = c_n$) qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Cf. la remarque 9).

III.6 - Un exercice

Exercice 7

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .
(b) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(b) En déduire que $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(b) En revenant à la définition de u_n , déterminer la valeur de ℓ .

III.7 - Python et les suites implicites

Considérons la suite implicite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les termes sont solutions de l'équation (E_n) : $f_n(x) = 0$.

L'algorithme de dichotomie permet d'obtenir une valeur approchée de x_n , à n fixé.

Se référer au TP sur les suites qui détaille l'implémentation de cet algorithme.