

Intégration sur un segment

I - Rappels.

I.1 - Primitives et techniques de calcul.

- Primitive d'une fonction continue f : Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
 - ★ Une fonction F est une primitive de f si F est dérivable et $F' = f$ sur I .
 - ★ Toute fonction continue f sur l'intervalle I admet des primitives.
- Tableau des primitives des fonctions usuelles à connaître par cœur.
- Calcul d'intégrale par primitivation :
 - ★ Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Intégration par partie :
 - ★ Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.
Alors : la formule d'intégration par parties donne :

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Méthode 1 : Utilisations classiques de l'IPP

- ★ On peut utiliser une IPP pour obtenir une nouvelle intégrale qu'on sait calculer : l'intégrale $\int_a^b f(x) g'(x) dx$ est plus simple à calculer que $\int_a^b f'(x) g(x) dx$.
- ★ On peut utiliser une IPP pour obtenir une relation de récurrence entre des intégrales dépendant d'un paramètre entier.
Il faut repérer la fonction qui permet de passer de n à $n+1$ (par dérivation ou primitivation).

- Changement de variable :

Méthode 2 : Changement de variable

- Il faut respecter les étapes suivantes dans l'ordre.
Dans l'exemple, la variable de départ est t et la variable d'arrivée est x .
- ★ Poser $x = u(t)$ avec u bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer si besoin $t = u^{-1}(x)$.
 - ★ Exprimer dx en fonction de dt en dérivant membre à membre la relation $x = u(t)$ (ou $t = u^{-1}(x)$) :

$$x = u(t) \implies dx = u'(t) dt \quad \text{ou} \quad t = u^{-1}(x) \implies dt = (u^{-1})'(x) dx$$
 - ★ Remplacer la variable t par la variable x à l'aide des relations précédentes (ne pas oublier dt).
 - ★ Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale à l'aide de la relation $x = u(t)$:
Si t varie entre les bornes a et b , alors x varie entre les bornes $u(a)$ et $u(b)$.

I.2 - Propriétés générales des intégrales.

- Définition : Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est bien définie.
- Linéarité de l'intégrale : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

- Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b, c) \in I^3$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- Ordre des bornes : $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.
- Positivité de l'intégrale : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
 - ★ Avec les bornes dans le bon sens ($a \leq b$), on a :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b], f(x) \leq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

- ★ Avec les bornes sont dans le sens inverse ($a \geq b$), on a :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b], f(x) \leq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Méthode 3 : Pour étudier le signe d'une intégrale.

On commence par étudier le signe de l'intégrande et on en déduit le signe de l'intégrale (par positivité de l'intégrale) en vérifiant l'ordre des bornes.

- Croissance de l'intégrale : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
 - ★ Avec les bornes dans le bon sens ($a \leq b$), on a :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- ★ Avec les bornes sont dans le sens inverse ($a \geq b$), on a :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Méthode 4 : Pour encadrer une intégrale.

- ★ On commence par encadrer l'intégrande et on en déduit un encadrement de l'intégrale (par croissance de l'intégrale) en vérifiant l'ordre des bornes.
- ★ Dans la pratique, on souhaite souvent obtenir une majoration du type $\int_a^b f(x) dx \leq C_{a,b}$.
Il faut alors majorer f par une fonction g (à deviner) de telle sorte que : $\int_a^b g(x) dx = C_{a,b}$.

- Inégalité triangulaire : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

II - Sommes de Riemann.

□ Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

III - Fonction définie par une intégrale.

On dit qu'une fonction de la variable x est définie par une intégrale lorsque cette variable x apparaît dans l'une ou les deux bornes de l'intégrale. On étudiera deux types de fonction définie par une intégrale :

$$g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

III.1 - Etude de $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Théorème 1 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ (a est une constante).

La fonction $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Ainsi, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ (comme primitive d'une fonction continue) et on a :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = f(x)$$

Remarque 1

- L'utilisatoir de ce théorème nécessite que la borne supérieure de l'intégrale soit égale à x et que la borne inférieure soit une consante.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ (comme primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$).

Exemple 1

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Rédaction type :

- On pose : $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x h(t) dt$.
- Ainsi, f est la primitive de h qui s'annule en 0. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

III.2 - Etude de $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Dans ce cadre plus général, on ne peut pas appliquer le théorème 1 précédent.

Méthode 5

Soit f une fonction continue sur I et $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

- Comme f est continue sur I , elle admet une primitive notée F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- On peut alors écrire :

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} \quad \text{soit} \quad g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

- Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (F , u et v).
- On a alors par dérivation d'une composée :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) \quad \text{soit} \quad g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Exemple 2

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-x}^{2x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Rédaction type :

- On pose $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car $H' = h$ est continue).
- On ne cherche pas à calculer H (souvent impossible) mais on peut écrire :

$$f(x) = \int_{-x}^{2x^2} h(t) dt = [H(t)]_{-x}^{2x^2} = H(2x^2) - H(-x)$$

- L'égalité $f(x) = H(2x^2) - H(-x)$ montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (car H est $\mathcal{C}^1$).
- On a alors par dérivation d'une composée : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = [H(2x^2) - H(-x)]' = 4xH'(2x^2) - (-H'(-x)) = 4xh(2x^2) + h(-x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

III.3 - Parité d'une fonction définie pas une intégrale.

Méthode 6

Pour étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale du type $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- On explicite : $g(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$.
- On réalise le changement de variable $u = -t$, ce qui donne (avec $dt = -du$) :

$$g(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(-u) (-du) = \int_0^x -f(-u) du$$

- On cherche à retomber sur $g(x)$ ou $-g(x)$ (la variable d'intégration u étant muette).