

Applications linéaires

I - Généralités sur les applications linéaires

I.1 - Définition

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E vers F .
On dit que f est une application linéaire (ou morphisme) de E dans F ssi :

$$\begin{cases} \bullet \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, & f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \bullet \forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, & f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{cases}$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Méthode 1 : Dans la pratique :

On peut vérifier les deux points de la définition en une seule étape en montrant directement que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v}).$$

Exercice 1

Soit g l'application $g : \begin{matrix} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0); P'(0)) \end{matrix}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}^2)$.

Définition 2

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

- Une application linéaire bijective de E dans F , est appelée isomorphisme de E dans F .
Lorsqu'il existe un isomorphisme entre deux espaces E et F on dit qu'ils sont isomorphes.
- Une application linéaire de E dans E ($f : E \rightarrow E$) est appelée endomorphisme de E .
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Un endomorphisme bijectif (isomorphisme de E dans E) est appelé automorphisme de E .

Exemple 1

- L'application nulle : $\theta_E : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & 0_E \end{matrix}$ est un endomorphisme de E .
- L'application identité : $id_E : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} \end{matrix}$ est un automorphisme de E .

Méthode 2

Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E , il faut :

- Prouver que f est linéaire avec la méthode 1.
- Vérifier que l'image par f de tout élément de E appartient à E : $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in E$.

Exercice 2

- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
Montrer que l'application $c_A : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow AM - {}^tMA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit d l'application qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $d(P)(X) = P'(X) + XP''(X)$.
Montrer que $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

I.2 - Propriétés des applications linéaires

Proposition 1

Soit f est une application linéaire de E dans F . Alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$
- $\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \in E^p, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\vec{v}_i)$.

Remarque 1

Il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E par f pour en déduire l'image de n'importe quel vecteur $\vec{u}$ de E par f .

En effet, si $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$, on peut calculer $f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{e}_i)$.

Exercice 3

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$f(\vec{e}_1) = (1, 0); \quad f(\vec{e}_2) = (2, -1); \quad f(\vec{e}_3) = (-3, 1).$$

Calculer $f((1, -2, 0))$ puis pour tout $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(\vec{u})$ en fonction de x, y et z .

Théorème 1

Soient E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f + g \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad \lambda f \in \mathcal{L}(E, F).$$

Théorème 2

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$g \circ f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & G \\ \vec{x} & \longmapsto & g(f(\vec{x})) \end{matrix} \in \mathcal{L}(E, G).$$

Proposition 2

Si f est un isomorphisme de E dans F alors l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E (donc en particulier, f^{-1} est linéaire).

Remarques 2

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note : $\bullet f^0 = id_E; \quad \bullet f^1 = f; \quad \bullet f^2 = f \circ f; \quad \dots \dots \quad \bullet f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
- Si f et g sont deux automorphismes de E alors $g \circ f$ est également un automorphisme de E et son application réciproque est : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

II - Noyau et image d’une application linéaire

II.1 - Noyau d’une application linéaire

Définition 3

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle noyau de l’application linéaire f , et on note $\text{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_F \right\}.$$

Remarques 3

- $\text{Ker}(f) \subset E$.
- Comme f est une application linéaire, on a : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc on a toujours : $\vec{0}_E \in \text{Ker}(f)$.
- Rédaction type pour caractériser $\text{Ker}(f)$: Soit $\vec{x} \in E$. On a : $\vec{x} \in \text{Ker}(f) \iff f(\vec{x}) = \vec{0}_F$

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, définie par $f(x, y, z, t) = (x - 2y + t, x - 2z + t, x - y - z + t)$.
Vérifier que $(1, 0, 0, -1) \in \text{Ker}(f)$ puis déterminer $\text{Ker}(f)$.

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau $\text{Ker}(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de E .

II.2 - Image d’une application linéaire

Définition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle image de l’application linéaire f , et on note $\text{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\text{Im}(f) = \left\{ \vec{v} \in F \mid \exists \vec{u} \in E, \vec{v} = f(\vec{u}) \right\}.$$

On peut aussi écrire plus simplement : $\text{Im}(f) = f(E) = \{ f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in E \}$.

Remarques 4

- $\text{Im}(f) \subset F$.
- $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a toujours : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc on a toujours : $\vec{0}_F \in \text{Im}(f)$.
- Rédaction type pour caractériser $\text{Im}(f)$: Soit $\vec{x} \in F$. On a : $\vec{x} \in \text{Im}(f) \iff \exists \vec{y} \in E$ tq $f(\vec{y}) = \vec{x}$.

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L’image $\text{Im}(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de F .

Théorème 3 : Image d’une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On suppose que $\dim(E) = n$ et on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .
Alors, $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, c’est-à-dire :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)).$$

Attention

Le théorème 3 ne signifie pas que la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$.
Cependant, on peut extraire de cette famille génératrice une sous-famille qui sera une base de $\text{Im}(f)$.

Méthode 3 : Déterminer une base de $\text{Im}(f)$

- On choisit une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E (le plus souvent, la base canonique). On sait alors d’après le théorème 3 que la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
- Si la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est libre, c’est donc une base de $\text{Im}(f)$.
- Si la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ n’est pas libre, on la réduit jusqu’à obtenir une famille libre.

Exercice 5

- Soit f l’endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. On considère l’application $g : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{matrix}$.
Déterminer une base de $\text{Im}(g)$.

II.3 - Injectivité, surjectivité

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- f est injective $\iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.
- f est surjective $\iff \text{Im}(f) = F$.

Exercice 6

L’application linéaire $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{matrix}$ est-elle injective ?

III - Rang d’une application linéaire

III.1 - Théorème du rang

Définition 5

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de l’application linéaire f , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Théorème 5 : Théorème du rang (version application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E).$$

Méthode 4

Le théorème du rang permet d’obtenir des informations sur l’image de f connaissant des informations sur son noyau et inversement. On l’utilise généralement de la manière suivante :

- On commence par déterminer une base du noyau (ou de l’image) de f et donc sa dimension.
- Connaissant la dimension de l’espace E , on en déduit grâce à la formule du rang la dimension de l’image (ou du noyau) de f .

Exercice 7

On considère l’application g de l’exercice 5.

- Déterminer le rang de g puis la dimension du noyau de g . g est-elle injective ?
- On note (M_1, M_2, M_3, M_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer $g(M_1 - M_3)$ et $g(M_2 - M_4)$ puis déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.

III.2 - Application à la caractérisation des isomorphismes

A l'aide du théorème du rang, le théorème 4 se réécrit de la manière suivante :

Proposition 5

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \underset{\text{Thm rg}}{\text{rg}(f) = \dim(E)}$

Dans le cas particulier où $\dim(E) = \dim(F)$, la proposition précédente donne :

f est injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F) \iff f$ est surjective

Théorème 6 : Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors :

Si f est injective, alors f est bijective

De même :

Si f est surjective, alors f est bijective

Dans ce cas, f est un isomorphisme de E vers F .

Le plus souvent, on utilisera le théorème précédent avec un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (cas où $E = F$).

Théorème 7 : Caractérisation des automorphismes

Soient E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E : $f \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

Si f est injective, alors f est bijective

De même

Si f est surjective, alors f est bijective

Dans ce cas, f est un automorphisme de E .

Méthode 5 : Caractérisation de la bijectivité

Si f est un endomorphisme de E (ou si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$), alors :

- Pour prouver que f est bijective, il suffit de montrer au choix : f injective ou f surjective.
- Pour prouver que f est bijective, il suffit de montrer au choix : $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ ou $\text{rg}(f) = \dim(E)$.

Exercice 8

1. L'application linéaire $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{matrix}$ de l'exercice 6 est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?
2. L'application linéaire $g : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{matrix}$ est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?
3. L'application linéaire $h : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{matrix}$ est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

IV - Cas particulier des matrices

IV.1 - Application linéaire associée à une matrice

Définition 6

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, l'application : $\begin{matrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$ est une application linéaire, dite application linéaire canoniquement associée à A .

IV.2 - Noyau, image d'une matrice

Définition 7 : Noyau d'une matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle noyau de A , et on note $\text{Ker}(A)$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base du noyau de A .

Définition 8 : Image d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_p \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice .
On appelle image de la matrice A , et on note $\text{Im}(A)$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p).$

Ainsi, on retrouve la définition du rang de la matrice A .

$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p).$

IV.3 - Théorème du rang matriciel et applications

Théorème 8 : Théorème du rang (version matrice)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = n.$

Théorème 9 : Caractérisation de l'inversibilité

- A est inversible $\iff \text{Ker}(A) = \{0\}.$
- A est inversible $\iff \text{rg}(A) = n.$

Exercice 10

- On considère la matrice A de l'exercice 9.
1. Déterminer le rang de A .
2. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AU puis en déduire $\text{Ker}(A)$.
3. La matrice A est-elle inversible ?