

Intégrales impropres

Lorsqu'une fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$, on sait définir l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$.

Le but de ce chapitre est de définir, lorsque c'est possible, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert du type $[a; +\infty[$, $] -\infty; a]$ ou $] -\infty; +\infty[$.

I - Extension de la notion d'intégrale

I.1 - Intégrale généralisée sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $] -\infty; a]$

Définition 1

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a; +\infty[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est impropre (ou généralisée) en $+\infty$.
- Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $] -\infty; a]$.
On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ est impropre (ou généralisée) en $-\infty$.

Remarque 1

L'étude d'une intégrale impropre commence par l'étude de la continuité de l'intégrande.

Définition 2 : Convergence d'une intégrale impropre en une borne infinie

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a; +\infty[$.
★ On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

- ★ Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.
- Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $] -\infty; a]$.
★ On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ est convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^a f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$, et dans ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt.$$

- ★ Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Remarque 2

Étudier la nature d'une intégrale impropre revient à déterminer sa convergence ou sa divergence.

Exercice 1

1. Soit $\alpha \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ selon les valeurs de α .
2. Soit $\alpha \neq 1$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ selon les valeurs de α .

I.2 - Intégrale généralisée sur $] -\infty; +\infty[$

Définition 3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Alors, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi les intégrales $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ convergent pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 2

Étudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$.

I.3 - Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et par passage à la limite.

Méthode 1 : Intégration par parties ou un changement de variable sur des intégrales impropres

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

Pour étudier cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable :

1. On restreint l'intervalle d'intégration à $[a; x]$ avec $x \in [a; +\infty[$.
2. On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie $\int_a^x f(t) dt$.
3. On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge et vaut 1.
2. On admet que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que $\int_m^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ converge et est égale à I .

II - Critères de convergence

II.1 - Intégrales de Riemann

Théorème 1 : Convergence des intégrales de Riemann

Soit α un réel.

- Intégrale de Riemann impropre en $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

- Intégrale de Riemann impropre en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

Remarque 3

Plus généralement, si $C > 0$, alors : $\int_C^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

II.2 - Théorèmes de comparaison pour des intégrales de fonctions positives

II.2.a - Critère de convergence des intégrales de fonctions positives

Théorème 2

Soient f une fonction continue et positive sur $[a; +\infty[$.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est majorée.

II.2.b - Critère de comparaison par inégalité

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; +\infty[$ telles que :

$$\forall t \in [a; +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

- Si $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ diverge.

Remarque 4

Ce critère de comparaison reste vrai si on suppose que $f \leq g$ seulement au voisinage de $+\infty$.

II.2.c - Critère de comparaison par négligeabilité

Théorème 4

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; +\infty[$ telles que :

$$f(t) = o(g(t))_{+\infty}$$

- Si $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ diverge.

II.2.d - Critère de comparaison par équivalence

Théorème 5

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; +\infty[$ telles que :

$$f(t) \sim_{+\infty} g(t)$$

Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) \, dt$ sont de même nature.

II.2.e - Critères de comparaison au voisinage de $-\infty$

Les trois critères de comparaison peuvent être adaptés au voisinage de $-\infty$.

Par exemple, pour le critère de comparaison par équivalence, on obtient :

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $]-\infty; a]$ telles que : $f(t) \sim_{-\infty} g(t)$.

Alors les intégrales $\int_{-\infty}^a f(t) \, dt$ et $\int_{-\infty}^a g(t) \, dt$ sont de même nature.

Exercice 4

1. Minorer $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t}$ sur $[1, +\infty[$ puis déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} \, dt$.
2. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2}$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$.
3. Déterminer un équivalent de $\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}$ en $+\infty$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} \, dt$ suivant les valeurs de α .
4. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t+t^2} \, dt$.

II.3 - Utilisation de la parité

Théorème 7 : Convergence et parité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Si la fonction f est paire, alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt$ converge ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.
En cas de convergence, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \, dt.$$
- Si la fonction f est impaire, alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt$ converge ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.
En cas de convergence, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 0.$$

Exercice 5

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ en utilisant le résultat de l'exercice 4.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \, dt$.

II.4 - Fonctions de signe quelconque

Définition 4 : Convergence absolue

Soit a un réel.

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)| \, dt$ converge.
- Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty; a]$.
On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t) \, dt$ est absolument convergente si $\int_{-\infty}^a |f(t)| \, dt$ converge.

Théorème 8

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ (resp. $\int_{-\infty}^a f(t) \, dt$) est absolument convergente, alors elle est convergente.
(La réciproque est fausse!)