

Séries numériques : Compléments

I - Rappels sur les séries numériques

Dans toute cette partie, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle.

I.1 - Définitions

Définition 1

On appelle série de terme général u_n , et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

- Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ converge et on appelle somme de la série la quantité $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarque 1

- S_n s'appelle la somme partielle d'indice n .
- Déterminer la nature d'une série consiste à déterminer si cette série est convergente ou divergente.

I.2 - Propriétés

Proposition 1

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum (u_n + \lambda v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

La réciproque est fautive : $\sum (u_n + v_n)$ converge n'implique pas que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

Remarque 2

Lorsqu'on effectue des calculs sur des séries, il est plus prudent de travailler sur les sommes partielles $\sum_{n=0}^N u_n$ jusqu'à s'assurer de la convergence. On peut ensuite écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 2

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Attention

La réciproque de la proposition 2 est fautive : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ n'implique pas que la série converge.

Contre-exemple : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On peut montrer que : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

II - Séries de références

II.1 - Série géométrique et ses dérivées

Théorème 1 : Séries géométriques

Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ dite série géométrique de raison q .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ dite série dérivée première de la série géométrique de raison q .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ dite série dérivée seconde de la série géométrique de raison q .

II.2 - Série exponentielle

Théorème 2 : Série exponentielle

Pour tout réel x , la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{dite série exponentielle}$$

II.3 - Séries de Riemann

Théorème 3 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Ces séries sont appelées les séries de Riemann.

Exercice 1

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)}{5^n} \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{n!}$$

II.4 - Sommes télescopiques

Méthode 1 : Sommes télescopiques

Une somme télescopique est une somme faisant apparaître une différence de termes consécutifs.

Par exemple : $\sum u_{n+1} - u_n$, $\sum u_n - u_{n+1}$, $\sum u_n - u_{n-1}$, $\sum u_{n+2} - u_n$, ...

Le calcul télescopique de la somme partielle $\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n)$ (pour $N \in \mathbb{N}$) permet par passage à la limite d'obtenir la nature de la série $\sum u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2

1. Déterminer a et b tels que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}$ puis en déduire la nature de la série : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

III - Séries à terme positifs - Critères de convergence

Dans cette section, $\sum u_n$ désigne une série à termes positifs, c'est-à-dire que pour tout n , $u_n \geq 0$.

III.1 - Un premier critère

Proposition 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle d'indice n .
Si la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est positive, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante.

Théorème 4

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque 3

Si une série à termes positifs diverge alors elle diverge vers $+\infty$.

III.2 - Théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.

Théorème 5 : Comparaison par inégalité

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 6 : Comparaison par négligeabilité

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 7 : Comparaison par équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 4

L'idée à retenir dans cette méthode est de chercher à "simplifier" l'expression du terme général de la série étudiée pour faire apparaître le terme général d'une série dont on sait si elle converge ou non.

Méthode 2 : Rédaction

Pour utiliser ces critères, il ne faut pas travailler directement sur la série mais sur son terme général.

- Comparer (par équivalent, négligeabilité ou inégalité) le terme général u_n de la série étudiée au terme général v_n d'une série de référence connue (série géométrique, série de Riemann, ...).
- Déterminer la nature de la série de référence $\sum v_n$ obtenue.
- Conclure par théorème de comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 3

a) Déterminer un équivalent de $v_n = 2\sqrt{n} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)$ puis en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.
b) Déterminer la limite de $n^3 e^{-n^2}$ puis en déduire la nature de la série de terme général : $u_n = n e^{-n^2}$.

III.3 - Convergence absolue

Dans ce paragraphe, la série de terme général u_n n'est plus forcément une série à termes positifs.

Définition 2

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument (ou est absolument convergente) si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 8

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est aussi convergente.

Remarques 5

- La réciproque de cette propriété est fausse.
Par exemple, on peut montrer (admis) que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
Par contre, on remarque que la série de terme général $|u_n| = \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge.
Donc la série $\sum u_n$ est convergente mais pas absolument convergente.
- La convergence absolue permet de ramener l'étude à une série à termes positifs, ce qui permet d'utiliser les résultats de comparaison associés à ces séries.
 - ★ Si la série $\sum |u_n|$ converge alors on peut dire que $\sum u_n$ converge (théorème 8).
 - ★ Si la série $\sum |u_n|$ diverge on ne peut rien dire sur la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.