

Applications linéaires et matrices

Dans ce chapitre, on considère E et F deux espaces vectoriels avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.

On note $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base de F .

I - Matrice associée à une application linéaire

I.1 - Rappel : matrice colonne associée à un vecteur

Définition 1

Pour tout $\vec{x} \in E$, il existe des réels uniques $x_1, \dots, x_n$ tels que $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$.

• Le n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ représente les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

• Le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'appelle le vecteur colonne associé à $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1

Soit $P(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$. Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? dans la base $(1, (X-1), (X-1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$? dans la base $((X-1)^2, (X-1), 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

Proposition 1

Avec les notations de la définition 1.

L'application : $\varphi : \begin{matrix} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \vec{x} & \longmapsto & X \end{matrix}$ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, on peut identifier tout vecteur de E à sa matrice dans une base.

I.2 - Matrice d'une application linéaire

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(\vec{e}_j) \in F$ donc il existe p réels $a_{1,j}, \dots, a_{p,j}$ tels que :

$$f(\vec{e}_j) = a_{1,j} \vec{f}_1 + \dots + a_{p,j} \vec{f}_p.$$

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la j -ème colonne donne les coordonnées du vecteur $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$, notée $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$:

$$Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1

- Les coordonnées des $f(\vec{e}_j)$ étant uniques, la matrice $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ associée à f est unique.
- Réciproquement à toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ il correspond une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E , la matrice associée à f est une matrice carrée de taille n .

Méthode 1

La construction de la matrice $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ associée à $f \in \mathcal{L}(E, F)$ se fait colonne par colonne.

- Pour chaque vecteur e_i de $\mathcal{B}_E$, on détermine les coordonnées de $f(\vec{e}_i)$ dans la base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$.
- On remplit alors la colonne correspondante de la matrice avec ces coordonnées.

Exemple 1 (Matrice de l'application identité : id_E)

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelque soit la base $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ choisie, on a $id_E(e_j) = e_j$. Ainsi, la matrice de l'application identité id_E est : $Mat_{\mathcal{B}_E}(id_E) = I_n$.

Exercice 2

- On considère l'application linéaire : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (x - y, 0)$. Déterminer la matrice A de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Déterminer la matrice B de l'endomorphisme φ_A relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit E un espace vectoriel admettant $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ comme base et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_E$ est la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1 , e_2 et e_3 .

II - Utilisation de la matrice d'une application linéaire

Souvent, une application linéaire f est définie par sa matrice A dans les bases canoniques. On passe alors par une étude de la matrice A pour en déduire certaines propriétés de f .

II.1 - Calcul d'image

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, on note X le vecteur colonne dans la base $\mathcal{B}_E$. Alors :

Le vecteur colonne associé à $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est donné par le produit AX .

Méthode 2 : Déterminer l'image d'une application linéaire à l'aide de sa matrice

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$. Pour déterminer $\text{Im}(f)$, on peut :

- Soit déterminer les images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ à l'aide de leurs coordonnées représentées par les colonnes de la matrice A puis écrire : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Soit commencer par déterminer $\text{Im}(A)$ puis en déduire $\text{Im}(f)$.

Exercice 3

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - On considère le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$. Calculer $f(P)$.
 - Déterminer $\text{Im}(f)$.
- Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - On admet que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(g)$.
 - Déterminer $\text{Im}(g)$.

II.2 - Noyau

Proposition 3 : Noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Pour tout $\vec{x} \in E$, on note X le vecteur colonne dans la base $\mathcal{B}_E$. Alors :

$$\vec{x} \in \text{Ker}(f) \iff X \in \text{Ker}(A).$$

En particulier, on a : $\text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(A) = \{0\}$.

Exercice 4

On considère les endomorphismes f et g définis dans l'exercice 3.

1. Soit $u = (0, 1, -1)$. Montrer que $u \in \text{Ker}(g)$.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$.

II.3 - Rang d'une application linéaire

Proposition 4 : Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$$

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{rg}(f)$. f est-il bijectif?

II.4 - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Théorème 1

- Avec les notations précédentes, les applications φ et ψ suivantes sont des isomorphismes.

$$\varphi: \begin{matrix} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \psi: \begin{matrix} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \end{matrix}$$

- En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f + \lambda g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g).$$

- D'autre part, on a : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$.

II.5 - Propriétés des matrices associées à des applications linéaires

Proposition 5

Soient E, F et G trois espaces vectoriels munis des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

- La composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées.
Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = [\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)]^k.$$

II.6 - Matrice d'un automorphisme et de sa réciproque

Proposition 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ sa matrice relative à la base $\mathcal{B}_E$. Alors :

$$f \text{ est bijectif} \iff A \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathcal{B}_E$: $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1})$.

Méthode 3

Lorsque l'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de regarder si sa matrice est inversible.

Exercice 6

1. Soient $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par : $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)v$.
Déterminer la matrice de f dans la base canonique. f est-il un automorphisme ?
2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : $\varphi(P)(X) = P(X + 1)$.
Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. φ est-il un automorphisme ?

II.7 - Bilan sur l'inversibilité d'une matrice

Remarque 2

Étudier l'inversibilité d'une matrice A revient à étudier son noyau.
En effet, si on note f est l'endomorphisme canoniquement associé à A , on a :

$$A \text{ est inversible} \iff f \text{ est bijectif} \iff f \text{ est injectif} \iff \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(A) = \{0\}.$$

Théorème 2 : Inversibilité d'une matrice carrée

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \underline{\text{si et seulement si}} \quad \text{Ker}(A) = \{0\}$$

- Si $\text{Ker}(A) = \{0\}$, alors la matrice A est inversible.
- Si $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$, la matrice A n'est pas inversible.

Méthode 4 : Étudier l'inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est inversible $\iff \text{Ker}(A) = \{0\}$.
- A est inversible $\iff \text{rg}(A) = n$.
- Une matrice ayant au moins une colonne (ou une ligne) nulle n'est pas inversible.
- Une matrice ayant deux colonnes (ou deux lignes) proportionnelles n'est pas inversible.
En particulier, une matrice ayant deux colonnes (ou deux lignes) égales n'est pas inversible.
- Une matrice ayant une colonne (ou une ligne) combinaison linéaire des autres n'est pas inversible.
- Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses éléments diagonaux sont non nuls.