

Variables aléatoires à densité

I - Variables aléatoires à densité

I.1 - Fonction de répartition et densité

Définition 1 : *Fonction de répartition d'une variable aléatoire*

Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P([X \leq x]).$$

Proposition 1 : *Caractérisation d'une fonction de répartition*

Une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Remarque 1

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et présente des points de discontinuité en toute valeur de $X(\Omega)$. C'est une fonction en escalier.

I.2 - Variables aléatoires à densité

Définition 2 : *Variable aléatoire à densité*

On dit que X est une variable aléatoire à densité si sa fonction de répartition F_X vérifie :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Définition 3 : *Densité*

Soit X une variable aléatoire à densité et F_X sa fonction de répartition.

Toute fonction f positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f = F_X'$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, est appelée une densité de X .

Méthode 1 : *Obtenir une densité lorsqu'on connaît la fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X connue.

- On commence par montrer que X est une variable aléatoire à densité.
 - ★ On montre que F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en certains points (à déterminer).
 - ★ Cela implique la continuité de F_X sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en ces points. On montre alors la continuité de F_X en ces points donc sur $\mathbb{R}$.
- On conclut que X est une variable aléatoire à densité et on obtient une densité f_X de X en dérivant F_X en tout point où elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et en donnant à f_X une valeur arbitraire positive ailleurs.

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et Z une variable aléatoire de fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Vérifier que Z est une variable à densité puis déterminer une densité f de Z .

Théorème 1 : *Caractérisation d'une fonction de répartition d'une variable à densité*

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Alors il existe une variable aléatoire à densité X telle que F soit la fonction de répartition de X .

Remarque 2

- Dans ce théorème 1, F est une fonction quelconque (on ne sait pas si il s'agit d'une fonction de répartition). Il diffère donc de la méthode 1 pour laquelle on sait que F_X est une fonction de répartition.
- Dans ce théorème, les trois premiers points montrent que F est une fonction de répartition d'une variable X et les deux derniers que X est une variable à densité.

Exercice 2

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable à densité X puis déterminer une densité f de X .

I.3 - Caractérisation d'une densité

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X telle que f soit une densité de la variable X .

On dit alors que f est une densité de probabilité.

Proposition 2

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X et de fonction de répartition F_X . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Méthode 2 : *Obtenir la fonction de répartition à partir d'une densité*

Calcul de F_X lorsque la densité f_X présente des points de discontinuité.

- On fait un graphe rapide de f_X pour définir différentes zones à étudier (intervalles délimités par les éventuels points de discontinuité).
- Le calcul de l'intégrale $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ nécessite de distinguer autant de cas que de zones.

On choisit x dans une zone et on calcule $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ en utilisant si besoin la relation de Chasles et en prenant soin d'utiliser la bonne formule de f_X en fonction de l'intervalle d'intégration.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Etudier la parité de f puis montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .

I.4 - Propriétés et règles de calcul

Proposition 3

Si f est une densité de probabilité, alors la fonction $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point x où f est continue et dans ce cas $F'(x) = f(x)$.

Proposition 4

- Si f_X est nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, alors $X(\Omega) = [a; b]$.
- Si $X(\Omega) = [a; b]$ (on dit que X est à support dans $[a, b]$), alors :

$$\forall t \leq a, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \geq b, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = 1.$$

Proposition 5 : A connaître par coeur

Soit X une variable aléatoire à densité f_X et de fonction de répartition F_X . Alors :

- $\forall a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ soit $P(X \leq x) = F_X(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)dt$ soit $P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (a \leq b) : P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$ soit $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque 3

- La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ s'interprète comme l'aire sous la courbe de la densité f_X entre a et b .
- Comme $P(X = x) = 0$ pour une variable aléatoire à densité, toutes les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes dans les calculs de probabilité.

Exercice 4

Soit Z la variable aléatoire définie dans l'exercice 1.

1. Calculer : $P(Z < 1/2)$, $P(Z \geq 1/2)$ et $P_{|Z \geq 1/2|}(Z < 3/4)$.
2. On définit $Y = Z^2$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité f_Y de Y .

Méthode 3

On dit que deux variables aléatoires X et Y ont même loi si leurs fonctions de répartition sont égales ou si leurs densités sont égales.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)/2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

On note $Y = -X$. Montrer que Y suit la même loi que X .

II - Moments d'une variable aléatoire à densité
II.1 - Espérance

Définition 4

Soit X une variable aléatoire de densité f .

On dit que X admet une espérance, notée $E(X)$, ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument et dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Exercice 6

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

1. Soit X une variable aléatoire de densité f . X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.
2. Soit Y une variable aléatoire de densité g . Y admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

II.2 - Théorème de transfert et moment d'ordre r

Théorème 3 : Théorème de transfert

Soient X est une variable aléatoire de densité f_X et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)dt$ converge absolument et dans ce cas, on a :

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)dt.$$

Exercice 7

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ (loi exponentielle).

La variable e^X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Définition 5

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si $E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$ existe.
- En particulier, X admet un moment d'ordre 2 si $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ existe.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (cf. exercice 7).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k+2} e^{-\lambda x}$ puis en déduire que : $x^k e^{-\lambda x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. En déduire que X admet des moments de tout ordre.

II.3 - Variance et écart-type

Définition 6

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle variance de X le réel

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 4

Une variable à densité X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

X admet-elle une espérance? une variance?