

**- EXERCICE 1 -**

Soit  $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $\mathcal{C}' = (R_0, R_1, R_2)$ , où  $R_0(X) = 1$ ,  $R_1(X) = X - 1$  et  $R_2(X) = (X - 1)^2$ , une autre base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  puis la matrice de passage  $Q$  de  $\mathcal{C}'$  à  $\mathcal{C}$ .

On obtient en exprimant les coordonnées de  $(R_0, R_1, R_2)$  dans  $\mathcal{C}$  :

$$R_0(X) = 1 = P_0(X); \quad R_1(X) = X - 1 = P_1(X) - P_0(X); \quad R_2(X) = X^2 - 2X + 1 = P_2(X) - 2P_1(X) + P_0(X)$$

$$\text{ce qui donne : } P = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient en exprimant les coordonnées de  $(P_0, P_1, P_2)$  dans  $\mathcal{C}'$  :

$$P_0(X) = 1 = R_0(X); \quad P_1(X) = X = R_1(X) + R_0(X); \quad P_2(X) = X^2 = X^2 - 2X + 1 + 2X - 2 + 1 = R_2(X) + 2R_1(X) + R_0(X)$$

$$\text{ce qui donne : } Q = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**- EXERCICE 2 -**

Soit  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ , où  $u = (1, -1, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$  et  $w = (0, 1, -1)$ , une autre base de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Déterminer la matrice de passage  $R$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

$$\text{On obtient facilement : } R = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Vérifier que la matrice de passage  $S = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  est  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

On sait que  $R = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est inversible et que son inverse est  $R^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ . Il s'agit donc de vérifier que  $S = R^{-1}$ .

$$\text{Pour cela, on montre que le produit } RS \text{ est égal à } I, \text{ ce qui est bien le cas. Ainsi, } P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

**- EXERCICE 3 -**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par  $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c$ .

Soit  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ , où  $R_0(X) = 1$ ,  $R_1(X) = X - 1$  et  $R_2(X) = (X - 1)^2$ , une autre base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

a) Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Déterminons la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ . On a :

- Comme  $P_0 = 0X^2 + 0X + 1$ , on doit prendre  $a = 0$ ,  $b = 0$  et  $c = 1$  dans la formule fournie, ce qui donne :  $f(P_0) = 3 = 3P_0$ .
- De même :  $f(P_1) = -X + 4 = -P_1 + 4P_0$ .
- De même :  $f(P_2) = X^2 - 4X + 6 = P_2 - 4P_1 + 6P_0$ .

$$\text{On obtient alors : } M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ . On a :

- On a :  $f(R_0) = 3 = 3R_0$ .
- De même :  $f(R_1) = f(X - 1) = -X + 4 - 3 = -(X - 1) = -R_1$ .
- De même :  $f(R_2) = f(X^2 - 2X + 1) = X^2 - (-2 + 4)X + 6 - 8 + 3 = X^2 - 2X + 1 = R_2$ .

On obtient alors :  $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , qui, Oh miracle, est une matrice diagonale.

b) Justifier l'existence d'une matrice  $P$  inversible telle que  $M = PDP^{-1}$  puis expliciter  $P$ .

Les matrices  $M$  et  $D$  représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc  $M$  et  $D$  sont des matrices semblables. Ainsi, il existe une matrice  $P$  inversible (qui est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ) telle que :  $M = PDP^{-1}$ .

$$\text{De plus, on a déjà vu dans l'exercice 1 que : } P = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**- EXERCICE 4 -**

Soit  $M$  la matrice de  $f$  trouvée dans l'exercice 3.

Déterminer la matrice  $M^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{On commence par déterminer } D^k, \text{ la matrice } D \text{ étant diagonale : } D^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

on a alors par récurrence simple :  $M^k = PD^kP^{-1}$  soit d'après les calculs de l'exercice 1 :

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots \text{ finir le calcul}$$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont-ils des vecteurs propres de  $A$ ? Si oui, donner les valeurs propres associées.

$$\text{On a : } AX = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X.$$

Ainsi,  $AX = -2X$  et  $X \neq 0$  : on en déduit que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-2$ .

$$\text{On a : } AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $AY = 0Y$  et  $Y \neq 0$  : on en déduit que  $Y$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $0$ .

**- EXERCICE 6 -**

Les réels  $\lambda = 1$  et  $\mu = -1$  sont-ils des valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  ?

Si c'est le cas, donner une base de l'espace propre associé.

- Le réel  $\lambda = 1$  est valeur propre de la matrice  $A$  ssi la matrice  $A - I$  est non inversible ssi  $\text{Ker}(A - I) \neq \{0\}$ .

Déterminons  $\text{Ker}(A - I)$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A - I) &\iff (A - I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ -4x + 4y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ -4x + 4y - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow -L_3 + L_1 \\ &\iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(A - I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$  donc  $\lambda = 1$  est valeur propre de la matrice  $A$ .

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  engendre l'espace propre associé noté  $E_1(A)$  et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_1(A)$ .

Remarque : On remarque facilement que  $A - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible (car  $C_2 = -C_1$ ). On peut

donc conclure directement que  $\lambda = 1$  est valeur propre de la matrice  $A$  mais cela ne nous fournit pas l'espace propre associé.

- De même, le réel  $\mu = -1$  est valeur propre de la matrice  $A$  ssi la matrice  $A + I$  est non inversible ssi  $\text{Ker}(A + I) \neq \{0\}$ .

Or, après calculs, on obtient :

$$X \in \text{Ker}(A + I) \iff (A + I)X = 0 \iff X = 0$$

Donc  $\text{Ker}(A + I) = \{0\}$ . Ainsi, le réel  $\mu = -1$  n'est pas valeur propre de la matrice  $A$ .

#### - EXERCICE 7 -

- Donner deux matrices (une triangulaire et l'autre non) qui admettent  $\lambda = 0$  comme valeur propre.**

La matrice  $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Ainsi,  $\text{Sp}(T) = \{0, 2\}$  et donc 0 est valeur propre de  $T$ .

La matrice  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible (car  $C_1 = C_2$  par exemple) donc 0 est valeur propre de  $U$ .

- Déterminer le spectre de la matrice  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  puis donner une base de ses sous-espaces propres.**

La matrice  $S$  est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Ainsi,  $\text{Sp}(S) = \{-1, 2\}$ .

Déterminons  $\text{Ker}(S + I)$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(S + I) &\iff (S + I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -3x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(S + I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  engendre l'espace propre associé noté  $E_{-1}(S)$  et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_{-1}(S)$ .

Déterminons  $\text{Ker}(S - 2I)$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(S - 2I) &\iff (S - 2I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -3y - 2z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(S - 2I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  engendre l'espace propre associé noté  $E_2(S)$  et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_2(S)$ .

#### - EXERCICE 8 -

**Déterminer les valeurs propres de la matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  puis donner une base de ses sous-espaces propres.**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\lambda \in \text{Sp}(T)$  ssi  $T - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$  est non inversible ssi  $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot (-1) = 0$ .

Or

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot (-1) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2$$

Ainsi :  $\text{Sp}(T) = \{2\}$ .

Déterminons  $\text{Ker}(T - 2I)$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(T - 2I) &\iff (T - 2I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(T - 2I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  engendre l'espace propre associé noté  $E_2(T)$  et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_2(T)$ .

#### - EXERCICE 9 -

**Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis en déduire un polynôme annulateur de  $A$ .**

On a :  $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $A^2 = 4A$  soit  $A^2 - 4A = 0$ .

Ainsi, le polynôme  $P(X) = X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

- EXERCICE 10 -

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on admet que  $A^3 - 7A^2 + 10A = 0$

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

Comme  $A^3 - 7A^2 + 10A = 0$ , on en déduit que le polynôme  $P(X) = X^3 - 7X^2 + 10X$  est un polynôme annulateur de A.

Or,  $P(X) = X^3 - 7X^2 + 10X = X(X^2 - 7X + 10)$ .

Ainsi,  $P(X) = 0 \iff X = 0$  ou  $X^2 - 7X + 10 = 0$  ssi  $X = 0$  ou  $X = 2$  ou  $X = 5$  (après calcul des racines).

Ainsi, les racines de P sont {0, 2, 5} donc les valeurs propres possibles de A sont {0, 2, 5} :  $Sp(A) \subset \{0, 2, 5\}$ .

2. Déterminer le spectre de A.

Il s'agit de vérifier pour chaque valeur propre possible si elle l'est ou non.

- Pour  $\lambda = 0$ , on a avec le pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice triangulaire inversible (sans zéro sur la diagonale).

Ainsi, A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre.

- Pour  $\lambda = 2$ , on a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est non inversible car } C_1 = C_2 \text{ donc } 2 \text{ est valeur propre de } A.$$

- Pour  $\lambda = 5$ , on a :

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ est non inversible car } C_1 = -C_2 - C_3 \text{ donc } 5 \text{ est valeur propre de } A.$$

Finalement, on a :  $Sp(A) = \{2, 5\}$ .

Remarque : On aurait aussi pu déterminer les SEP  $\text{Ker}(A)$ ,  $\text{Ker}(A - 2I)$  et  $\text{Ker}(A - 5I)$  mais c'est plus long et ce n'est pas demandé.

- EXERCICE 11 -

Déterminer les valeurs propres de la matrice  $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ .

Le réel  $\lambda$  est valeur propre de la matrice B

$$\text{ssi la matrice } B - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible.}$$

Appliquons le pivot de Gauss à la matrice  $B - \lambda I$  :

$$\begin{aligned} B - \lambda I &= \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ 0 & -\lambda-3 & -2\lambda-6 \\ 0 & -2(\lambda+3) & -\lambda^2-4\lambda-3 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ & & L_3 \leftarrow L_3 + (2+\lambda)L_1 \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ 0 & -\lambda-3 & -2\lambda-6 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+9 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, la matrice } (B - \lambda I) \text{ n'est pas inversible ssi } \begin{cases} -\lambda - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ -\lambda^2 + 9 = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \lambda = -3 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \end{cases}. \text{ Ainsi, } Sp(B) = \{-3, 3\}.$$

- EXERCICE 12 -

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  de l'exercice 10 est diagonalisable et la diagonaliser.

On a vu à l'exercice 10 que :  $Sp(A) = \{2, 5\}$ .

On va chercher les sous espaces propres. On obtient après calculs :

$$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(U, V) \quad \text{et} \quad E_5(A) = \text{Ker}(A - 5I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(W)$$

La famille (U, V) engendre  $E_2(A)$  et est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de  $E_2(A)$ .

La famille (W) engendre  $E_5(A)$  et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_5(A)$ .

Par concaténation de ces deux bases associées à deux valeurs propres différentes, on obtient que la famille  $\mathcal{B}' = (U, V, W)$  est libre. Comme elle contient 3 vecteurs dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension 3, on en déduit que  $\mathcal{B}' = (U, V, W)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de A. On en déduit que A est diagonalisable.

En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}'$  et D la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A, on a d'après la formule de changement de bases :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- EXERCICE 13 -

La matrice  $O = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

La matrice O est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi,  $Sp(O) = \{3, 4, 5\}$ .

Notons U, V et W trois vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 3, 4 et 5.

La famille  $\mathcal{B}' = (U, V, W)$  est libre car composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Comme elle contient 3 vecteurs dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension 3, on en déduit que  $\mathcal{B}' = (U, V, W)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de O. On en déduit que O est diagonalisable.

- EXERCICE 14 -

La matrice  $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  l'est-elle ?

La matrice N est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi,  $Sp(N) = \{3\}$ .

La matrice N n'admet qu'une seule valeur propre.

Supposons que N soit diagonalisable. Alors, N est semblable à une matrice diagonale D.

Ainsi, il existe une matrice P inversible et D diagonale telle que :

$$N = PDP^{-1}$$

Comme D est diagonale et contient les valeurs propres de N, on a :  $D = 3I$  (puisque  $Sp(N) = \{3\}$ ). On a alors :

$$N = PDP^{-1} = P(3I)P^{-1} = 3PIP^{-1} = 3I$$

Absurde car  $N \neq 3I$  donc N n'est pas diagonalisable.

- EXERCICE 15 -

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la matrice  $B = A + {}^tA$  est diagonalisable.

On a :  ${}^tB = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = B$  donc la matrice B est symétrique donc elle est diagonalisable.

2. Justifier que la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable puis la diagonaliser.

La matrice C est symétrique donc elle est diagonalisable.

- Déterminons  $Sp(C)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\lambda \in Sp(C) \text{ ssi } C - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible ssi } (1-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Or (identité remarquable) :

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = 0 \iff \lambda(2-\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2$$

Ainsi :  $Sp(C) = \{0, 2\}$ .

- Déterminons les sous espaces propres.

On obtient après calculs :  $E_0(C) = \text{Ker}(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $E_2(C) = \text{Ker}(C - 2I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

- Notons  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et considérons la famille  $\mathcal{B}' = (U, V)$ . La famille  $\mathcal{B}'$  est libre par concaténation de deux bases (car  $U \neq 0$  et  $V \neq 0$ ) associées à deux valeurs propres différentes. Comme  $\mathcal{B}' = (U, V)$  contient 2 vecteurs de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension 2,  $\mathcal{B}' = (U, V)$  est une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On en déduit que  $A$  est diagonalisable.

En notant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}'$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  la matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $A$ , on a d'après la formule de changement de bases :  $A = PDP^{-1}$ .