

- EXERCICE 1 -
Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules dans cette urne sans remise. On note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

1. **Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .**
Clairement, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.
Pour tout $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, l'évènement $((X = i) \cap (Y = i))$ est impossible puisque le tirage se fait sans remise.

$$P((X = i) \cap (Y = i)) = 0$$

D'autre part, on a pour $(i, j) \in (\llbracket 1; 3 \rrbracket)^2$ et $j \neq i$:

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P_{(X=i)}(Y = j) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

avec $P_{(X=i)}(Y = j) = \frac{1}{2}$ car la boule i n'est pas remise dans l'urne donc il reste deux boules.

$\begin{array}{c} X \\ \backslash \\ Y \end{array}$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

2. **Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .**
La loi de X (première loi marginale) est la loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ car le premier tirage se fait au hasard dans une urne contenant 3 boules.
On obtient la loi marginale de Y par application de la FPT en utilisant le SCE $((X = 1), (X = 2), (X = 3))$:

$$P(Y = 1) = P((Y = 1) \cap (X = 1)) + P((Y = 1) \cap (X = 2)) + P((Y = 1) \cap (X = 3)) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

De même : $P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}$.
Ainsi, X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.

Remarque : On retrouve ces résultats en additionnant les probabilités des colonnes (pour la loi de X) et les lignes (pour la loi de Y), ce qui donne :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

 et

k	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- EXERCICE 2 -
On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que les lancers sont indépendants et on note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

1. **Déterminer la loi de X .**
 X correspond au temps d'attente du premier succès (obtenir pile) lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit la loi géométrique de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
2. **Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X, Y) .**
On a clairement $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.
- Si $i \geq j$, l'évènement $((X = i) \cap (Y = j))$ est impossible puisqu'on ne peut pas obtenir le deuxième pile avant le premier donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$.

- Par contre, si $i < j$, on a, en notant P_k (resp. F_k) l'évènement "obtenir Pile (resp. Face) au k -ième tirage :

$$\begin{aligned} P((X = i) \cap (Y = j)) &= P(F_1 \dots F_{i-1} P_i F_{i+1} \dots F_{j-1} P_j) \\ &= P(F_1) \dots P(F_{i-1}) P(P_i) P(F_{i+1}) \dots P(F_{j-1}) P(P_j) \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= p^2 q^{j-2} \quad \text{car on a fait } j \text{ lancers dont 2 piles (donc } (j-2) \text{ faces)} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on a : } P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ p^2 q^{j-2} & \text{si } i < j \end{cases}$$

3. **Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .**
- X suit la loi géométrique de paramètre p .
 - Pour la loi de Y on utilise la FPT avec un SCE associé à X .
Soit $j \geq 2$. On a, d'après la FPT avec le SCE $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} p^2 q^{j-2} + \sum_{i=j}^{+\infty} 0 \quad \text{car la loi du couple est nulle si } i \geq j \\ &= (j-1) p^2 q^{j-2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } j \geq 2, \text{ on a : } P(Y = j) = (j-1) p^2 q^{j-2}.$$

- EXERCICE 3 -
Soit n un entier avec $n \geq 2$. On considère n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on y effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche. On note Z le numéro de l'urne choisie et X_n le nombre de tirages effectués.

1. **Rappeler la loi de Z .**
Le tirage se faisant au hasard entre les n urnes, Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$: $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.
2. **Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Préciser $X_n(\Omega)$ puis déterminer la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z = i]$.**
 $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on peut obtenir la boule blanche dès le premier tirage comme ne jamais l'obtenir (si on tire par exemple dans une urne contenant des blanches et des noires).
Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Sachant l'évènement $[Z = i]$ réalisé, cela signifie que l'on effectue les tirages dans l'urne i qui contient i boules blanches et $n - i$ boules noires.
Ainsi, sachant $[Z = i]$ réalisé, X_n correspond alors au temps d'attente du premier succès (obtenir une blanche) de probabilité de succès $\frac{i}{n}$ lors d'expériences de Bernoulli indépendantes.
Ainsi, la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z = i]$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{i}{n}$, ce qui donne :

$$\forall k \geq 1, \quad P_{[Z=i]}(X_n = k) = \left(\frac{n-i}{n}\right)^{k-1} \frac{i}{n}$$

3. **En déduire que la loi de X_n est donnée par :** $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \left(\frac{n-i}{n}\right)^{k-1}$.
D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $([Z = i])_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, on obtient :

$$P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n P_{[Z=i]}(X_n = k) P(Z = i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n-i}{n}\right)^{k-1} \frac{i}{n} \frac{1}{n}$$

$$\text{soit } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \left(\frac{n-i}{n}\right)^{k-1}.$$

- EXERCICE 4 -
On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et on suppose que les lancers sont indépendants. On note X le rang d'apparition du premier pile. Si le premier pile est arrivé au n -ième lancer, on note alors Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

1. Déterminer la loi de X .

X correspond au temps d'attente du premier succès (obtenir pile) lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

2. Préciser $Y(\Omega)$. Soit $n \geq 1$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

- On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet, si $[X = n]$, alors, les valeurs prises par Y sont $\llbracket 0; n \rrbracket$. Mais comme n peut être arbitrairement grand, Y peut prendre toutes les valeurs entières.
- Soit $n \geq 1$. Sachant $[X = n]$, cela signifie que le premier pile est arrivé au n -ième lancer. La variable Y compte alors le nombre de succès (obtenir Face de probabilité $1 - p$) obtenus lors de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et $q = 1 - p$.

Ainsi, $P_{[X=n]}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} q^k p^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \text{ d'après la question précédente} \\ 0 & \text{si } k > n \quad \text{car on ne peut obtenir plus de piles que de lancers} \end{cases}$

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n$.

On a, d'après la FPT avec le SCE ($[X = n]_{n \in \mathbb{N}^*}$: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(Y = k) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} P(X = n) \underbrace{P_{[X=n]}(Y = k)}_{=0} + \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(Y = k) \quad \text{car } P_{[X=n]}(Y = k) = 0 \text{ si } n < k \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(Y = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-1} p \times \binom{n}{k} q^k p^{n-k} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n \end{aligned}$$

- EXERCICE 5 -

Les variables aléatoires X et Y de l'exercice 1 sont-elles indépendantes ?

On a vu dans l'exercice 1 que : $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0$ (événement impossible).

Or, on a vu également que $P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ donc $P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{9}$.

Ainsi, $P((X = 1) \cap (Y = 1)) \neq P(X = 1) \times P(Y = 1)$ donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

- EXERCICE 6 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de

Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Calculer $P(Z_n = 0)$.

Commençons par remarquer que comme les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont positives ou nulles, on a :

$$(Z_n = 0) \iff \sum_{i=1}^n X_i = 0 \iff X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Z_n = 0) &= P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \dots P(X_n = 0) \quad \text{par indépendance de } (X_1, \dots, X_n) \\ &= (P(X_1 = 0))^n \quad \text{car les variables suivent la même loi} \\ &= \left(\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}\right)^n = e^{-\lambda n} \end{aligned}$$

- EXERCICE 7 -

On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli

$\mathcal{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = B + G$.

On a $B(\Omega) = \{0, 1\}$ et $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $S(\Omega) = BG(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(S = 1) &= P(B + G = 1) \\ &= P(B = 0 \cap B + G = 1) + \underbrace{P(B = 1 \cap B + G = 1)}_{=0 \text{ car } B=1 \Rightarrow B+G \geq 2} \quad \text{car } B(\Omega) = \{0, 1\} \\ &= P(B = 0 \cap G = 1) \\ &= P(B = 0)P(G = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - p) \frac{1}{2} = \frac{1 - p}{2} \end{aligned}$$

Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(B + G = k) \\ &= P((B = 0 \cap G = k) \cup (B = 1 \cap G = k - 1)) \quad \text{car } k \geq 2 \text{ donc } k - 1 \geq 1 \\ &= P(B = 0)P(G = k) + P(B = 1)P(G = k - 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - p) \left(\frac{1}{2}\right)^k + p \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1 - p}{2^k} + \frac{p}{2^{k-1}} = \frac{1 - p + 2p}{2^k} = \frac{1 + p}{2^k} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(S = 1) = \frac{1 - p}{2}$ et $P(S = k) = \frac{1 + p}{2^k}$ pour $k \geq 2$.

- EXERCICE 8 -

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

En utilisant un SCE associé à X , montrer que :

$$\forall n \geq 2, P(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P((Y = n - k) \cap (X = k)) \quad \text{puis que : } P(X + Y = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}.$$

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. D'après la FPT avec le SCE $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X + Y = n) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ n-k \in Y(\Omega)}}^{+\infty} P((Y = n - k) \cap (X = k)) \end{aligned}$$

Or, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $n - k \in Y(\Omega) \implies n - k \geq 1 \implies k \leq n - 1$.

Ainsi, $P((Y = n - k) \cap (X = k)) = 0$ pour tout $k > n - 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P((Y = n - k) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(Y = n - k) \times P(X = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-k-1} p \times q^{k-1} p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n - 1)p^2 q^{n-2} \end{aligned}$$

- **EXERCICE 9** -
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Calculer $P(X = Y)$.
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. D'après la FPT avec le SCE $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = Y) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Y = k) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k)P(X = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{k-1} p \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = p^2 \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{p}{1 + q} \end{aligned}$$

- **EXERCICE 10** -
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer par récurrence que $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda)$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(k) : X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda)$.

- Initialisation : évident.
- Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda)$. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \dots, X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ des variables aléatoires indépendantes. On a
 - $\star \quad X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda)$ par HR
 - $\star \quad X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
 - $\star \quad X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
On en déduit par stabilité des lois de Poisson que $X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(k\lambda + \lambda)$ soit $X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}((k + 1)\lambda)$ donc $\mathcal{P}(k + 1)$ vrai.

- **EXERCICE 11** -
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer l'espérance de M .
On a par linéarité de l'espérance :

$$E(M) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda$$

- **EXERCICE 12** -
Soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre p , indépendantes.
1. **Déterminer la loi de XY puis en déduire $E(XY)$.**
Notons $Z = XY$. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0; 1\}$ donc $Z(\Omega) = XY(\Omega) = \{0; 1\}$. Ainsi $Z = XY$ est une variable de Bernoulli. Il reste à déterminer son paramètre, à savoir $P(Z = 1)$. Or, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(XY = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) \\ &= P(X = 1)P(Y = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $XY \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$. Ainsi, $E(XY) = p^2$.

2. **Déterminer $E(XY)$ à l'aide du théorème de transfert.**
D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 xyP([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{car } X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\} \\ &= 0.0.P([X = 0] \cap [Y = 0]) + 0.1.P([X = 0] \cap [Y = 1]) + 1.0.P([X = 1] \cap [Y = 0]) + 1.1.P([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ &= P([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ &= P([X = 1])P([Y = 1]) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $E(XY) = p^2$.

- **EXERCICE 13** -
Soient X_1, X_2 , et X_3 , indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre p .
Montrer que les variables aléatoires $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a : $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = p^2$ donc $E(Y_1) = p^2$.
Comme X_2 et X_3 sont indépendantes, on a : $E(X_2 X_3) = E(X_2)E(X_3) = p^2$ donc $E(Y_2) = p^2$.
D'autre part, on a : $Y_1 Y_2 = X_1 X_2^2 X_3$ donc

$$\begin{aligned} E(Y_1 Y_2) &= E(X_1 X_2^2 X_3) \\ &= E(X_1)E(X_2^2)E(X_3) \quad \text{par indépendance (lemme des coalitions)} \\ &= p \times p \times p = p^3 \end{aligned}$$

car $E(X_2^2) = V(X_2) + E(X_2)^2 = pq + p^2 = p(q + p) = p$.
Ainsi, on a :

$$E(Y_1 Y_2) = p^3 \neq p^4 = E(Y_1)E(Y_2)$$

donc les variables aléatoires $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

- **EXERCICE 14** -
Déterminer la covariance des variables X et Y de l'exercice 1.
Comme X et Y admettent des moments d'ordre 2, on a :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On a vu dans l'exercice 1 que X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.
On en déduit que : $E(X) = E(Y) = \frac{3+1}{2} = 2$.
D'après le théorème de transfert, on a avec les résultats de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 xyP([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times 0 + 6 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 9 \times 0 \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

On a donc : $\text{cov}(X, Y) = \frac{11}{3} - 2^2 = -\frac{1}{3}$.

- **EXERCICE 15** -
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.
On utilise la formule $V(Z) = \text{cov}(Z, Z)$ avec $Z = X + \lambda Y$. On a alors :

$$\begin{aligned} V(X + \lambda Y) &= \text{cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) \\ &= \text{cov}(X, X) + \lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda \text{cov}(Y, X) + \lambda^2 \text{cov}(Y, Y) \quad \text{linéarité à gauche et à droite de la covariance} \\ &= V(X) + 2\lambda \cdot \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y) \end{aligned}$$

- EXERCICE 16 -

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la variance de M .

On a :

$$\begin{aligned} V(M) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{1}{n} \lambda \end{aligned}$$

donc $V(M) = \frac{\lambda}{n}$.

- EXERCICE 17 -

On a obtenu dans l'exercice 15 l'égalité suivante : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.

En étudiant le discriminant du polynôme en λ obtenu, montrer que : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

Notons $P(\lambda)$ le polynôme de degré 2 en λ obtenu. Ainsi : $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ avec $a = V(Y)$, $b = 2\text{cov}(X, Y)$ et $c = V(X)$.

D'autre part, une variance étant toujours positive, on a pour tout λ :

$$P(\lambda) = V(X + \lambda Y) \geq 0$$

Ainsi, le polynôme P de degré 2 en λ est de signe constant (positif), on en déduit que son discriminant est négatif, soit :

$$\Delta = (2\text{cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$$

soit

$$\text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$$

puis $V(X)$ et $V(Y)$ étant non nulles :

$$\frac{\text{cov}(X, Y)^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$$

ce qui donne enfin en passant à la racine (croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\frac{\sqrt{\text{cov}(X, Y)^2}}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \leq \sqrt{1}$$

soit

$$|\rho_{X,Y}| = \left| \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \right| \leq 1$$

- EXERCICE 18 -

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y de l'exercice 1 et interpréter son signe.

On a vu dans l'exercice 14 que $\text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{3} < 0$.

D'autre part, on a vu dans l'exercice 1 que X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.

On en déduit que : $V(X) = V(Y) = \frac{3^2 - 1}{12} = \frac{2}{3}$.

On en déduit que :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/3}{2/3} = \frac{-1}{2} < 0$$

On interprète ce signe négatif par le fait que si X a tendance à augmenter (la première boule tirée porte un numéro plus grand), alors Y à tendance à diminuer (la deuxième boule tirée portera un numéro plus petit puisqu'il n'y a pas de remise).