

- EXERCICE 1 -

Résoudre le système différentiel $X' = DX$ lorsque $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonal.

Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le système différentiel $X' = DX$ s'écrit :

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) \\ x_2'(t) = bx_2(t) \\ x_3'(t) = cx_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \lambda_1 e^{at} \\ x_2(t) = \lambda_2 e^{bt} \\ x_3(t) = \lambda_3 e^{ct} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

chaque équation se résolvant indépendamment des autres. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{at} \\ \lambda_2 e^{bt} \\ \lambda_3 e^{ct} \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 2 -

1. **Résoudre le problème de Cauchy** $(\mathcal{E}_1) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ vérifiant $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

$(\mathcal{E}_1)$ est un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminons les éléments propres de A .

• Spectre de A .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp(A)$ ssi $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible ssi $(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = 0$.

Or, on a :

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = 0 \iff -(2-\lambda)(2+\lambda) - 5 = 0 \iff -(4-\lambda^2) - 5 = 0 \iff \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 3$$

Ainsi : $Sp(A) = \{-3, 3\}$.

• SEP de A .

On obtient : $E_{-3}(A) = \text{Ker}(A + 3I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(U)$ et $E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(V)$.

La famille (U, V) est libre par concaténation de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Elle est composée de deux vecteurs de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(M_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ donc c'est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Ainsi, on est dans les conditions d'application du théorème.

Comme $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -3 et $V = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3 , on en déduit que les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \lambda e^{-3t} U + \mu e^{3t} V, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{soit} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-3t} + 5\mu e^{3t} \\ -\lambda e^{-3t} + \mu e^{3t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On détermine λ et μ avec les condition initiales, ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 5\mu = 2 \\ -\lambda + \mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\mu = 1 \\ \lambda = \mu + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1/6 \\ \lambda = 7/6 \end{cases}$$

Finalement, $(\mathcal{E}_1)$ admet pour unique solution : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t} \\ -\frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \end{pmatrix}$.

2. **On considère** $(\mathcal{E}_2) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$ **et on pose** $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **et** $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que les vecteurs U, V et W sont des vecteurs propres de la matrice A associée au système différentiel $(\mathcal{E}_2)$ puis déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_2)$.

$(\mathcal{E}_2)$ est un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

- $U \neq 0$ et $AU = 2U$ donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 .
- $V \neq 0$ et $AV = 2V$ donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 .
- $W \neq 0$ et $AW = 5W$ donc W est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5 .

La famille $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est libre par concaténation de familles libres associées à deux valeurs propres distinctes $((U, V)$ pour 2 et (W) pour 5). Comme elle contient 3 vecteurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 , $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Donc A est diagonalisable donc on est dans les conditions d'application du théorème. On en déduit que les solutions sont de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \lambda e^{2t} U + \mu e^{2t} V + \gamma e^{5t} W, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{soit} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} + \mu e^{2t} + \gamma e^{5t} \\ -\lambda e^{2t} + \gamma e^{5t} \\ -\mu e^{2t} + \gamma e^{5t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

- EXERCICE 3 -

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$, **où x et y sont des fonctions inconnues dérivables**

sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $X' = AX$.

1. **Déterminer la matrice A . Montrer que $Sp(A) = \{2\}$ puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.**

$(\mathcal{E})$ est un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp(A)$ ssi $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible ssi $(3-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-1) = 0$.

Or

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-1) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2$$

Ainsi : $Sp(A) = \{2\}$.

Supposons que A soit diagonalisable. Alors, A est semblable à une matrice diagonale D .

Ainsi, il existe une matrice P inversible et D diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Mais $D = 2I$ (puisque $Sp(A) = \{2\}$ et que D est diagonale et contient les valeurs propres de A). On a alors :

$$A = PDP^{-1} = P(2I)P^{-1} = 2I$$

Absurde car $A \neq 2I$ donc A n'est pas diagonalisable.

2. **On pose** $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(inversible) et** $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **On admet que $A = PTP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.**

(a) **Justifier que $Y' = P^{-1}X'$ puis montrer que : $X' = AX \iff Y' = TY$.**

Comme $Y = P^{-1}X$, on a : $Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$ par linéarité de la dérivation (chaque composante du vecteur $P^{-1}X$ est une combinaison linéaire des composantes de X).

On a alors, en remarquant que $Y' = P^{-1}X' \iff X' = PY'$ et en utilisant la relation $A = PTP^{-1}$:

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff PY' = PTP^{-1}X \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{=I} Y' = \underbrace{P^{-1}P}_{=I} T \underbrace{P^{-1}X}_{=Y} \\ &\iff Y' = TY \end{aligned}$$

(b) **On note** $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$ puis en déduire les solutions de $(\mathcal{E}') Y' = TY$.

Pour l'équation en u , on cherchera une solution particulière sous la forme $u_p(t) = kte^{2t}$.

- L'équation différentielle $v' = 2v$ qui se réécrit $v' - 2v = 0$ est une équation linéaire homogène dont les solutions sont de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = \lambda e^{2t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Le système différentiel $(\mathcal{E}')$ $Y' = TY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est de la forme : $\begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = 2v \end{cases}$.

Or, on a obtenu $v(t) = \lambda e^{2t}$, ce qui donne : $\begin{cases} u'(t) = 2u(t) + \lambda e^{2t} \\ v(t) = \lambda e^{2t} \end{cases}$.

Il reste donc à résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}'')$ $u'(t) - 2u(t) = \lambda e^{2t}$.

Les solutions de l'équation homogène $u' - 2u = 0$ sont de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \mu e^{2t}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $u_p(t) = kte^{2t}$. On dérive ce qui donne $u_p'(t) = ke^{2t} + 2kte^{2t}$ et on injecte dans $(\mathcal{E}'')$ ce qui donne :

$$ke^{2t} + 2kte^{2t} - 2kte^{2t} = \lambda e^{2t} \iff ke^{2t} = \lambda e^{2t} \iff k = \lambda$$

Ainsi, on a comme solution de $(\mathcal{E}'')$: $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \mu e^{2t} + \lambda te^{2t}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de $(\mathcal{E}')$ $Y' = TY$ sont :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu e^{2t} + \lambda te^{2t} \\ \lambda e^{2t} \end{pmatrix}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- (c) **Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.**

Comme $Y = P^{-1}X$, on a $X = PY$, ce qui permet d'obtenir l'expression de X à partir de l'expression de Y trouvée à la question précédente : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu e^{2t} + \lambda te^{2t} \\ \lambda e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu e^{2t} + 2\lambda te^{2t} + \lambda e^{2t} \\ 2\mu e^{2t} + 2\lambda te^{2t} - \lambda e^{2t} \end{pmatrix} \text{ soit } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda + 2\lambda t)e^{2t} \\ (2\mu - \lambda + 2\lambda t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

- EXERCICE 4 -

On se place dans le cadre du théorème suivant.

Théorème 1
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante : $(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by = 0$
On considère le système différentiel $(\mathcal{S}) \quad X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.
On a alors : $y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff X \text{ est solution de } (\mathcal{S})$

1. **Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.**

Notons $(EC) : X^2 + aX + b = 0$ l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\iff -\lambda(-a - \lambda) + b = 0 \\ &\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est solution de } (EC) : X^2 + aX + b = 0 \end{aligned}$$

avec $X^2 + aX + b = 0$ qui représente bien l'équation caractéristique de $(\mathcal{E})$.

2. **On suppose maintenant que $(\mathcal{E}) \quad y'' + 5y' - 6y = 0$.**

- (a) **Expliciter A puis montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A .**

Dans ce cas, on a : $a = 5$ et $b = -6$ et donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

On a alors :

- $U \neq 0$ et $AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 36 \end{pmatrix} = -6U$ donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -6 .

- $V \neq 0$ et $AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$ donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

- (b) **Retrouver alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.**

La famille (U, V) est libre par concaténation de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Elle est composée de deux vecteurs de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(M_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ donc c'est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Ainsi, on est dans les conditions d'application du théorème.

Comme $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -6 et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, on en déduit que les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \lambda e^{-6t} U + \mu e^t V, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{soit} \quad X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-6t} + \mu e^t \\ * \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi; $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-6t} + \mu e^t, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ce qui correspond bien aux solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad y'' + 5y' - 6y = 0$ dont l'équation caractéristique $X^2 + 5X - 6 = 0$ admet pour racines $\{-6, 1\}$.

- EXERCICE 5 -

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}_1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ étudié à l'exercice 2.

1. **Donner l'ensemble des trajectoires de $(\mathcal{E}_1)$.**

D'après le résultat de l'exercice 2, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-3t} + 5\mu e^{3t} \\ -\lambda e^{-3t} + \mu e^{3t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ donc les trajectoires sont pour λ et μ réels :

$$\{(\lambda e^{-3t} + 5\mu e^{3t}, -\lambda e^{-3t} + \mu e^{3t}) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$$

2. **Déterminer les points d'équilibres de $(\mathcal{E}_1)$.**

Les points d'équilibres sont donnés par $\text{Ker}(A)$.

Or, on a vu dans l'exercice 2 que $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et que $Sp(A) = \{-3, 3\}$.

Ainsi, $0 \notin Sp(A)$ donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$ donc l'unique point d'équilibre est le point $(0, 0)$.

Remarque : On rappelle pourquoi les points d'équilibres sont donnés par $\text{Ker}(A)$. Une solution X du système $(\mathcal{E}_1) : X' = AX$ est un point d'équilibre ssi elle est composée de fonctions constantes donc ssi elle vérifie $X' = 0$ et donc $AX = 0$.

3. **La trajectoire de la solution du problème de Cauchy obtenue à l'exercice 2 est-elle convergente ?**

La trajectoire de la solution du problème de Cauchy obtenue à l'exercice 2 est :

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left\{ \left(\frac{7}{6} e^{-3t} + \frac{5}{6} e^{3t}, -\frac{7}{6} e^{-3t} + \frac{1}{6} e^{3t} \right) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \right\}$$

On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{7}{6} e^{-3t} + \frac{5}{6} e^{3t} = +\infty$ donc la trajectoire est divergente.

On a aussi et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{7}{6} e^{-3t} + \frac{1}{6} e^{3t} = +\infty$ mais il suffit qu'une des composantes soit divergente pour que la trajectoire le soit (donc cet argument n'est pas nécessaire).

4. **Exhiber une trajectoire convergente.**

Il s'agit de trouver une limite finie pour : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda e^{-3t} + 5\mu e^{3t}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda e^{-3t} + \mu e^{3t}$.

Si $\mu \neq 0$, on obtient des limites égales à $+\infty$.

Pour obtenir une trajectoire convergente, on doit choisir $\mu = 0$.

Par exemple, pour $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, donc on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-3t} = 0$.

Ainsi, la trajectoire $\{(e^{-3t}, -e^{-3t}) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$ est convergente et converge vers le point d'équilibre $(0, 0)$.

- EXERCICE 6 -

On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$.

Les trajectoires de $(\mathcal{E})$ sont-elles convergentes?

$(\mathcal{E})$ est un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi, $Sp(A) = \{-3, 0, 2\}$.

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Comme A admet une valeur propre strictement positive ($\lambda = 2$), il existe des trajectoires de $(\mathcal{E})$ qui sont divergentes.

Plus précisément, si U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, le vecteur fonction $t \mapsto e^{2t}U$ est une solution de $(\mathcal{E})$ dont la trajectoire diverge. En effet, U étant non nul, une de ses composantes aura pour limite $\pm\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.