

- EXERCICE 1 -

1. **Montrer que la fonction** $f : (x, y) \rightarrow \frac{2x - 3x^2 y^3}{x^2 + y^2 + 1}$ **est continue sur** $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas (car $x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$).

2. **Montrer que la fonction** $g : (x, y) \rightarrow y \ln(x^2 + y)$ **est continue sur** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

- $(x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
 - $(x, y) \mapsto x^2 + y$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (car polynomiale) à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par composition.
- Finalement, g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par produit.

- EXERCICE 2 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = ye^{-x^2-y}$.

1. **Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et les calculer.**

- La fonction d'une variable $x \mapsto ye^{-x^2-y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition donc f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x .
- La fonction d'une variable $y \mapsto ye^{-x^2-y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit donc f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y .

Ainsi, f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1(f)(x, y) = -2xye^{-x^2-y} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = e^{-x^2-y} - ye^{-x^2-y} = (1-y)e^{-x^2-y}$$

2. **Déterminer le gradient de la fonction f au point** $(1, 2)$.

Le gradient de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donné par : $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2xye^{-x^2-y} \\ (1-y)e^{-x^2-y} \end{pmatrix}$, ce qui donne au point $(1, 2)$:

$$\nabla(f)(1, 2) = \begin{pmatrix} -4e^{-3} \\ -e^{-3} \end{pmatrix}$$

3. **Déterminer tous les points (x, y) vérifiant** $\nabla(f)(x, y) = 0$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -2xye^{-x^2-y} \\ (1-y)e^{-x^2-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2xye^{-x^2-y} = 0 \\ (1-y)e^{-x^2-y} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2xy = 0 & \text{car } e^{-x^2-y} \neq 0 \\ (1-y) = 0 & \text{car } e^{-x^2-y} \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 1)$

- EXERCICE 3 -

Montrer que la fonction f de l'exercice 2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- $(x, y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
 - $(x, y) \mapsto -x^2 - y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale).
Comme $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a : $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition.
- Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par produit.

- EXERCICE 4 -

Montrer que la fonction f de l'exercice 2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

- $(x, y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
 - $(x, y) \mapsto -x^2 - y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale).
Comme $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a : $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition.
- Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par produit et on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = -2ye^{-x^2-y} - 2xy(-2x)e^{-x^2-y} = 2y(2x^2 - 1)e^{-x^2-y}$
- $\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = -e^{-x^2-y} - (1-y)e^{-x^2-y} = (y-2)e^{-x^2-y}$
- $\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_1(\partial_2(f))(x, y) = (1-y)(-2x)e^{-x^2-y} = -2x(1-y)e^{-x^2-y}$
- Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a d'après le théorème de Schwarz :
 $\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = -2x(1-y)e^{-x^2-y}$

- EXERCICE 5 -

Déterminer la matrice hessienne de la fonction f de l'exercice 2 au point $(1, 2)$.

La matrice hessienne de la fonction f au point (x, y) est donnée par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(2x^2 - 1)e^{-x^2-y} & -2x(1-y)e^{-x^2-y} \\ -2x(1-y)e^{-x^2-y} & (y-2)e^{-x^2-y} \end{pmatrix}$$

ce qui donne au point $(1, 2)$:

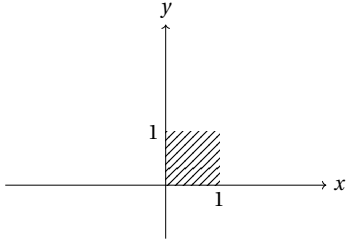
$$\nabla^2(f)(1, 2) = \begin{pmatrix} 4e^{-3} & 2e^{-3} \\ 2e^{-3} & 0 \end{pmatrix} = e^{-3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- EXERCICE 6 -

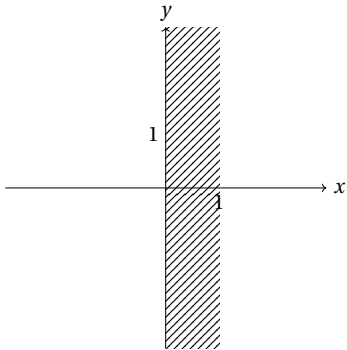
1. Représenter graphiquement les domaines ouverts suivants :

$$U_1 =]0, 1[\times]0, 1[, \quad U_2 =]0, 1[\times \mathbb{R}, \quad U_3 = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

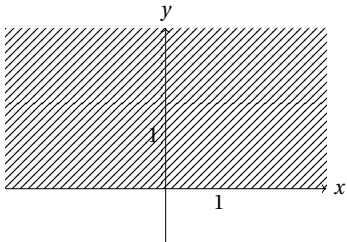
- $U_1 =]0, 1[\times]0, 1[:$



- $U_2 =]0, 1[\times \mathbb{R} :$



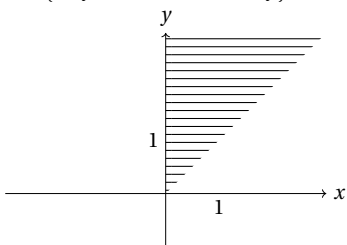
- $U_3 = \mathbb{R} \times]0, +\infty[:$



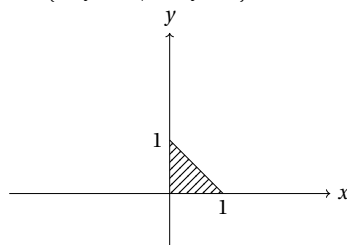
2. Représenter graphiquement les domaines suivants

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x < y\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$$

- $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x < y\} :$



- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\} :$



- EXERCICE 7 -

Soit $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

Déterminer, si ils existent, les extremums locaux de f et préciser leurs natures.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 3y - 3x^2 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = 3x - 3y^2$$

- Tout d'abord, précisons que $\mathbb{R}^2$ est un ensemble ouvert ce qui permet l'étude suivante.
- Déterminons les points critiques de f : (x, y) est un point critique de f ssi $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x - x^4 = 0 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x(1 - x^3) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} &\quad \text{car la fonction cube est bijective} \end{aligned}$$

Ainsi, f admet deux points critique : $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$.

- Pour vérifier si ces points critiques sont des extremums, nous devons d'abord déterminer la matrice Hessienne de f .

On a en utilisant le théorème de Schwarz pour les dérivées croisées (f est de classe $\mathcal{C}^2$) :

$$\partial_{1,1} f(x, y) = -6x \quad \text{et} \quad \partial_{2,2} f(x, y) = -3y \quad \text{et} \quad \partial_{1,2} f(x, y) = \partial_{2,1} f(x, y) = 3$$

Ainsi, la matrice Hessienne de f en tout point (x, y) est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -3y \end{pmatrix}$$

- ★ En $A = (0, 0)$:

$$\text{On a : } H_A = \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de H_A ssi $H_A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible ssi $\lambda^2 - 9 = 0$ ssi $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.

Donc $Sp(H_A) = \{-3, 3\}$. H_A admet deux valeurs propres de signe opposée donc f n'admet pas d'extremum local en A : f admet un point col en A .

- ★ En $B = (1, 1)$:

$$\text{On a : } H_B = \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de H_B ssi $H_B - \lambda I = \begin{pmatrix} -6-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible ssi $(-6-\lambda)^2 - 9 = 0$ ssi $(-6-\lambda-3)(-6-\lambda+3) = 0$ ssi $\lambda = -9$ ou $\lambda = -3$.

Donc $Sp(H_B) = \{-9, -3\}$. H_B admet deux valeurs propres strictement négatives donc f admet un maximum local en B .

- EXERCICE 8 -

Soit f la fonction définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par : $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$.

1. Soit f la fonction définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par : $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions polynomiales de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($x > 0$ et $y > 0$).

2. Montrer que pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$: $f(x, y) \geq 4$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) \geq 4 &\iff \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4 \\ &\iff (x+y)^2 \geq 4xy \quad \text{car } xy > 0 \\ &\iff (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \\ &\iff (x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant toujours vérifiée, on a bien le résultat voulu.

3. Montrer que f admet un minimum global sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ en tout point de la forme (a, a) avec $a > 0$.

Il s'agit de montrer que pour tout $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $f(a, a) \leq f(x, y)$.

Or, on a : $f(a, a) = \frac{(2a)^2}{a^2} = 4$, ce qui donne avec la question précédente : $f(x, y) \geq 4 = f(a, a)$.

Ainsi, f admet un minimum global en tout point de la forme (a, a) avec $a > 0$.