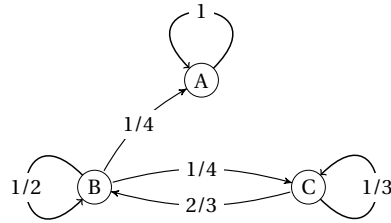


- EXERCICE 1 -

Compléter le graphe probabiliste suivant en indiquant les poids manquants puis construire sa matrice de transition.



On en déduit la matrice de transition : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 2 -

Ugho (le nom a été changé pour des raisons de respect de la vie privée) aime jouer avec son look.

Il a dans ses tiroirs un lot de perruques punk (allant de la houppette rose fluo à la tignasse multicolore à paillette) ainsi qu'une collection de piercing et autres anneaux folkloriques.

Chaque matin, il choisit soit une perruque (look 1), soit un piercing (look 2), soit, dans les jours de grande forme, le combo explosif perruque/piercing (look 3).

Cependant ce côté déluré de sa personnalité cache une certaine rigidité qui le fait choisir son style suivant des règles très précises décrites ci-dessous.

- Le premier jour, chaque look a la même probabilité d'être choisi.
- Le look 1 étant le moins populaire auprès de ses camarades, Ugho ne le choisit jamais deux jours de suite.
- Si Ugho a choisi un certain jour le look 1, il choisira au hasard le look 2 ou le look 3 le jour suivant.
- Si Ugho a choisi le look 2 ou le look 3 un certain jour, il y a une chance sur deux qu'il change de look le jour suivant et dans ce cas, autant de chance de choisir un des deux autres.

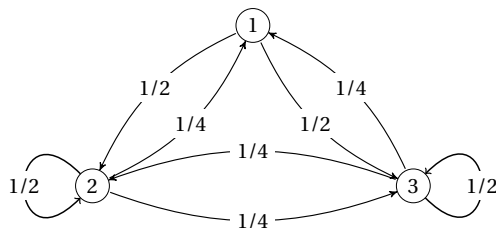
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le look choisi par Ugho le n -ième jour.

1. Quelle est la loi de X_1 ?

Le choix étant équiprobable le premier jour, X_1 suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$.

2. Justifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

Le choix du look le jour $n+1$ ne dépend que de celui du jour n donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas du passé (avant n) donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

3. Représenter le graphe ainsi que la matrice de transition A associés à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit la matrice de transition : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le n -ième état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

4. Justifier soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_{n+1} = V_n A$.

Il s'agit d'exprimer la loi de X_{n+1} en fonction de la loi de X_n . On a :

- D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $((X_n = 1); (X_n = 2); (X_n = 3);)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) \\ &= 0 + \frac{1}{4}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3) \end{aligned}$$

- De même, on a :

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3)$$

et

$$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3)$$

- Ces trois formules s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) & P(X_{n+1} = 2) & P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

soit : $V_{n+1} = V_n A$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = V_1 A^{n-1}$.

Par récurrence :

- Pour $n = 1$: $V_1 A^0 = V_1 I = V_1$
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $V_n = V_1 A^{n-1}$. On a alors avec la relation de la question précédente :

$$V_{n+1} = V_n A = V_1 A^{n-1} A = V_1 A^n$$

- Conclusion : ...

6. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un état stable et le déterminer.

$U = (a, b, c)$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si $UA = U$ et si U définit une loi de probabilité donc si $a + b + c = 1$.

On obtient après calculs : $UA = U \iff U = (a, 2a, 2a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. La condition $a + b + c = 1$ donne alors $5a = 1$ soit $a = 1/5$.

Ainsi, la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet comme unique état stable le vecteur $U = (1/5 \ 2/5 \ 2/5)$.

Remarque : On aurait pu chercher de manière équivalente $\text{Ker}({}^t A - I)$ pour obtenir un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre 1.

7. On admet que A est diagonalisable et que : $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer rigoureusement comment obtenir le vecteur ligne V_n qui représente le n -ième état probabiliste de la chaîne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = V_1 A^{n-1}$.

Or, par récurrence simple, on obtient : $A^{n-1} = P D^{n-1} P^{-1}$.

On en déduit que : $V_n = V_1 P D^{n-1} P^{-1}$, produit matriciel que l'on peut faire (mais un peu long), le calcul de D^{n-1} étant simple (diagonale).

(b) On obtient après calculs :

$$V_n = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note $z_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$.

Déterminer z_i pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et vérifier que $(z_i)_{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$ définit une loi de probabilité qui correspond à l'état stable de la chaîne de Markov.

Remarque : Si on note Z une variable aléatoire ayant pour loi de probabilité $(z_i)_{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$, on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Z .

On a : $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$ qui représente la loi de X_n .

On obtient en passant à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{n-1} = 0$ car $-\frac{1}{4} \in]0, 1[$, ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

qui correspond à l'état stable de la chaîne, ce qui est cohérent avec le résultat du cours.

Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont la loi est :

$P(Z = 1) = 1/5, P(Z = 2) = 2/5, P(Z = 3) = 2/5$.