

- EXERCICE 1 -

Que peut-on dire de la fonction f au voisinage de 0 si $f(x) = o(1)$? si $f(x) = 1/2 + o(1)$?

- On a : $f(x) = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Ainsi, une fonction f est négligeable devant 1 (plus généralement devant une constante) au voisinage de 0 si et seulement si f tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

- Si $f(x) = 1/2 + o(1)$ alors, $f(x) - 1/2 = o(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 1/2 = 0$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/2$.

- EXERCICE 2 -

- a) **Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité, au voisinage de $+\infty$.**

$$\ln(x); \quad e^x; \quad \frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{\ln(x)}; \quad \sqrt{x}; \quad e^{-x}; \quad x^2; \quad \frac{1}{x}; \quad x$$

D'après les croissances comparées du cours, on obtient, au voisinage de $+\infty$:

e^{-x}	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\ln(x)}$	$\ln(x)$	$\sqrt{x}$	x	x^2	e^x
----------	-----------------	---------------	--------------------	----------	------------	-----	-------	-------

- b) **Montrer que :** $e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Il suffit de montrer que la limite du quotient vaut 0. On a en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 e^{-t} = 0 \quad \text{par CC}$$

$$\text{Ainsi, } e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- EXERCICE 3 -

On considère les fonctions suivantes au voisinage de 0 : $f(x) = x^2 + o(x^2)$ **et** $g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Écrire le plus simplement possible les expressions de : $\frac{f(x)}{2x}$, **de** $g(x) - 2xf\left(\frac{x}{2}\right)$ **et de** $f(x) + g(x)$.

- On a :

$$\frac{f(x)}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{o(x^2)}{2x} = \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

car on peut ignorer la constante 1/2 dans le petit-o.

- On a :

$$\begin{aligned} g(x) - 2xf\left(\frac{x}{2}\right) &= -x^2 + x^3 + o(x^3) - 2x\left(\frac{x^2}{4} + o\left(\frac{x^2}{4}\right)\right) \\ &= -x^2 + x^3 + o(x^3) - \frac{x^3}{2} - o\left(\frac{x^3}{2}\right) \\ &= -x^2 + \underbrace{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}_{=o(x^2)} \quad \text{on peut ignorer la constante dans le deuxième petit-o} \end{aligned}$$

Remarque : Comme $\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ est négligeable devant x^2 en 0, on peut aussi écrire :

$$g(x) - 2xf\left(\frac{x}{2}\right) = -x^2 + o(x^2)$$

mais c'est moins précis.

- On a :

$$f(x) + g(x) = x^2 + o(x^2) - x^2 + x^3 + o(x^3) = o(x^2) + \underbrace{x^3 + o(x^3)}_{=o(x^2)} = o(x^2)$$

- EXERCICE 4 -

Déterminer un équivalent simple de $x - \ln(x)$ **en** $+\infty$ **et en** 0^+ **et de** $\frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)$ **en** 0.

- On a :

$$x - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{car} \quad \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \text{ par C.C.}$$

$$x - \ln(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x) \quad \text{car} \quad x \underset{0^+}{=} o(\ln(x)) \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty).$$

- Comme $x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, on a : $\frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

- EXERCICE 5 -

- a) **Déterminer un équivalent de :** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2}$ **en** $+\infty$ **puis en** 0^+ .

$$\bullet \quad x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2 \text{ donc } (x^2 + x)^{1/2} \underset{+\infty}{\sim} (x^2)^{1/2} = x$$

$$\bullet \quad x^4 + 4x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^4$$

$$\text{donc par quotient, on a : } \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}.$$

$$\bullet \quad x^2 + x \underset{0}{\sim} x \text{ donc } (x^2 + x)^{1/2} \underset{0}{\sim} x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$\bullet \quad x^4 + 4x^2 \underset{0}{\sim} 4x^2$$

$$\text{donc par quotient, on a : } \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{4x^2} = \frac{1}{4x^{3/2}}.$$

- b) **Déterminer un équivalent de :** $g(x) = \ln(x)(2x^2 + e^{-x})^2$ **en** $+\infty$.

$$\text{Comme } e^{-x} \underset{+\infty}{=} o(2x^2), \text{ on a : } 2x^2 + e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} 2x^2 \text{ donc par puissance, on a : } (2x^2 + e^{-x})^2 \underset{+\infty}{\sim} 4x^4.$$

$$\text{Ainsi, on a par produit : } g(x) = \ln(x)(2x^2 + e^{-x})^2 \underset{+\infty}{\sim} 4x^4 \ln(x).$$

Attention :

Il est faux continuer à simplifier en écrivant : " $4x^4 \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} 4x^4$ car $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^4)$."

En effet, on ne peut ignorer un terme négligeable que dans une somme mais pas dans un produit.

$$\text{Ainsi, } 4x^4 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} 4x^4 \text{ mais } 4x^4 \ln(x) \underset{+\infty}{\not\sim} 4x^4$$

- EXERCICE 6 -

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 - \ln(x) = ?$

$$\bullet \quad -x^3 - \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x) \text{ par CC donc : } e^x - x^3 - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}} = ?$

$$\bullet \quad x^2 - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \text{ car } \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^2)$$

$$\bullet \quad e^x + x^3 \underset{+\infty}{\sim} e^x \text{ car } x^3 \underset{+\infty}{=} o(e^x) \text{ donc par puissance } \sqrt{e^x + x^3} = (e^x + x^3)^{1/2} \underset{+\infty}{\sim} (e^x)^{1/2} = e^{x/2}$$

$$\text{Enfin, par quotient : } \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^{x/2}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = 0 \text{ par CC.}$$

- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{\ln(x)} = ?$

Attention ici à ne pas composer les équivalents.

Il est faux d'écrire : $1 + x^3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ donc $\ln(1 + x^3) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^3)$.

Par contre, on peut écrire :

$$\frac{\ln(1 + x^3)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x^3(1/x^3 + 1))}{\ln(x)} = \frac{\ln(x^3) + \ln(1/x^3 + 1)}{\ln(x)} = \frac{3\ln(x) + \ln(1/x^3 + 1)}{\ln(x)} = 3 + \frac{\ln(1/x^3 + 1)}{\ln(x)}$$

puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1/x^3 + 1) = 0$ par composition donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/x^3 + 1)}{\ln(x)} = 0$ par quotient.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)} = 3$.

- EXERCICE 7 -

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?**

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de dénominateur non nul ($1+x > 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(1+x) > 0$).

• Continuité en 0. On étudie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. On a :

$$\star 1 - e^{x^2} = -(e^{x^2} - 1) \underset{0}{\sim} -x^2 \quad \text{car} \quad e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \quad \text{et} \quad x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$\star \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

donc par quotient, on a : $\frac{1 - e^{x^2}}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0

Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- EXERCICE 8 -

Montrer que : $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$.

On a :

$$t^{\frac{1}{t}} - 1 = e^{1/t \ln(t)} - 1 = e^{\frac{\ln(t)}{t}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t} \quad \text{car} \quad e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \quad \text{et} \quad \ln(t)/t \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- EXERCICE 9 -

En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Notons $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{donc} \quad g'(0) = \frac{1}{2}$$

et en remarquant que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ pour faciliter les calculs :

$$g''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \quad \text{donc} \quad g''(0) = -\frac{1}{4}$$

donc d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0, on a :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

soit

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$$

donc $\alpha = -\frac{1}{8}$.

- EXERCICE 10 -

a) **Déterminer l'équivalent au voisinage de 0 de la fonction** $f(x) = \ln(1+x) - x$.

On ne peut pas additionner les équivalents donc on utilise les DL. On a au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

b) **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :** $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ de dénominateur non nul.

• Calculons le tau d'accroissement en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

On ne peut pas utiliser les équivalents aux numérateurs à cause de la somme. On utilise les DL, ce qui donne, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x &= 1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x \\ &= x^2/2 + o(x^2) \\ &\underset{0}{\sim} x^2/2 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par quotient d'équivalents :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ donc la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

- EXERCICE 11 -

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{1+x} + 1$.

a) **Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f .**

On a au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{1+x} + 1 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^3) + 1 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{car} \quad x^3 \underset{0}{=} o(x^2) \end{aligned}$$

donc le développement limité d'ordre 2 en 0 de f est : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

b) **En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.**

D'après la question précédente, l'équation de la tangente en 0 est : $y = 1 + x$.

De plus, comme $f(x) - (1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) > 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de f est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.