

- EXERCICE 1 -

1. **Écrire la matrice** $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ **comme combinaison linéaire de** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

On devine facilement une combinaison linéaire : $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ soit $M = 2A - B$ donc M est combinaison linéaire de A et B .

2. **Écrire le vecteur** $\vec{u} = (4, 2)$ **comme combinaison linéaire de** $\vec{v} = (2, -1)$ **et** $\vec{w} = (3, 1)$.

Ici, c'est moins évident donc on recherche à la main.

Il s'agit de chercher deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned} \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} &\iff (4, 2) = a(2, -1) + b(3, 1) \\ &\iff (4, 2) = (2a + 3b, -a + b) \\ &\iff \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -a + b = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ 5b = 8 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ &\iff \begin{cases} a = -2/5 \\ b = 8/5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{u} = -2/5\vec{v} + 8/5\vec{w}$ donc $\vec{u}$ est bien combinaison linéaire de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$

3. **Le polynôme** $P(X) = 3X^2 + X$ **est-il une combinaison linéaire de** $Q(X) = X^2$ **et** $R(X) = 2X + 1$?

Attention : on peut deviner l'égalité $P(X) = Q(X) + X \cdot R(X)$ mais cette égalité ne constitue pas une combinaison linéaire car X n'est pas un réel !

Comme précédemment, on cherche deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned} P(X) = aQ(X) + bR(X) &\iff 3X^2 + X = aX^2 + 2bX + b \\ &\iff \begin{cases} a = 3 \\ 2b = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{par identification} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solution donc P n'est pas une combinaison linéaire de Q et R .

- EXERCICE 2 -

Expliciter le sous-espace vectoriel engendré $\mathcal{E}$ par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Est-ce que $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$?

Par définition, on a :

$$\text{Vect}(A, B) = \{aA + bB, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{soit} \quad \text{Vect}(A, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a+2b \\ 3b & -2a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On remarque que $M = A + 2B$ donc $M \in \mathcal{E}$.

- EXERCICE 3 -

Montrer que l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & x+2y \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ **est un espace vectoriel en l'écrivant sous forme de sous-espace engendré.**

On a :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & x+2y \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_B, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_C \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $E = \text{Vect}(A, B, C)$ est le sev engendré par la famille (A, B, C) donc c'est un espace vectoriel.

- EXERCICE 4 -

1. **Montrer que :** $\text{Vect}((4, 0, -2); (1, 2, -1); (-3; 2; 1)) = \text{Vect}((2, 0, -1); (1, 2, -1)).$

On a, en notant $\vec{u} = (4, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ et $\vec{w} = (-3; 2; 1)$:

$$\begin{aligned} \text{Vect}((4, 0, -2); (1, 2, -1); (-3; 2; 1)) &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{car } \vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \\ &= \text{Vect}\left(\frac{1}{2}\vec{u}, \vec{v}\right) \quad \text{opération autorisée} \\ &= \text{Vect}((2, 0, -1); (1, 2, -1)) \end{aligned}$$

2. **Soit** (e_1, e_2, e_3, e_4) **une famille de vecteurs d'un espace vectoriel** E .

Montrer que : $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4; e_2 + e_3; 2e_2 + 2e_3) = \text{Vect}(e_1 + e_4; e_2 + e_3).$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4; e_2 + e_3; 2e_2 + 2e_3) &= \text{Vect}(u, v, w) \\ &= \text{Vect}(u, v) \quad \text{car } w = 2v \\ &= \text{Vect}(u - v, v) \quad \text{opération autorisée} \\ &= \text{Vect}(e_1 + e_4; e_2 + e_3) \end{aligned}$$

- EXERCICE 5 -

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

1. $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$

Commençons par signaler que E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in E &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -2y + y + z = 0 \\ x = -2y \end{cases} &\iff \begin{cases} z = y \\ x = -2y \end{cases} \\ &&&\iff \vec{u} = (-2y, y, y) = y(-2, 1, 1) \end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}((-2, 1, 1))$. Ainsi, E est le sev de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $((-2, 1, 1))$. Remarquons que c'est une droite vectorielle.

2. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM = MA \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $M \in F \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, F est le sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P - XP' = 0\}$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] : P(X) = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in G &\iff P - XP' = 0 \iff aX^2 + bX + c - X(2aX + b) = 0 \\ &\iff -aX^2 + c = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{car un polynôme est nul si ses coefficients sont nuls} \\ &\iff P(X) = bX \end{aligned}$$

Ainsi, $P \in G \iff P(X) = bX$ donc $G = \text{Vect}(X)$.

Ainsi, G est le sev de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par la famille (X) .

- EXERCICE 6 -

Montrer que la famille $((1, 0); (0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ puis en déduire que la famille $((1, 1); (-1, 1))$ est également génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\vec{u} = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

Donc tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $((1, 0); (0, 1))$ donc la famille $((1, 0); (0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0); (0, 1))$.

Montrons que $((1, 1); (-1, 1))$ est également génératrice de $\mathbb{R}^2$ en montrant que $\text{Vect}((1, 1); (-1, 1)) = \text{Vect}((1, 0); (0, 1))$.

On a :

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 1); (-1, 1)) &= \text{Vect}((0, 2); (-1, 1)) && \text{premier moins deuxième} \\ &= \text{Vect}((0, 1); (-1, 1)) && \text{premier divisé par 2} \\ &= \text{Vect}((0, 1); (-1, 0)) && \text{deuxième moins premier} \\ &= \text{Vect}((0, 1); (1, 0)) && \text{deuxième divisé par } -1 \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- EXERCICE 7 -

1. **Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) | AX = 0\}$ (noyau de A).**

Montrer que $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\text{Ker}(A) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par définition.
- $A0 = 0$ donc $0 \in \text{Ker}(A)$. (Ce 0 est le 0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). $\text{Ker}(A) \neq \emptyset$.
- Soient $(X, Y) \in (\text{Ker}(A))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
 $A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = 0 + \lambda 0 = 0$. En effet, $AX = 0$ et $AY = 0$ car $(X, Y) \in (\text{Ker}(A))^2$.
Donc $X + \lambda Y \in \text{Ker}(A)$.

Donc $\text{Ker}(A)$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a un réel fixé et E_a l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'annulent en a .**

Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarquons que : $E_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(a) = 0\}$.

- $E_a \subset \mathbb{R}_n[X]$ par définition.
- Le polynôme nul s'annule en a donc appartient à E_a . Ainsi, $E_a \neq \emptyset$.
- Soient $(P, Q) \in E_a^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
 $(P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a) = 0 + \lambda 0 = 0$.
Donc $P + \lambda Q \in E_a$.

Donc E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est un espace vectoriel.

- EXERCICE 8 -

- a) **Montrer que la famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-2, 7, -6))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$a(1, 3, -3) + b(4, 2, -3) + c(-2, 7, -6) = (0, 0, 0) \iff (a + 4b - 2c, 3a + 2b + 7c, -3a - 3b - 6c) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} a + 4b - 2c = 0 \\ 3a + 2b + 7c = 0 \\ -3a - 3b - 6c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 4b - 2c = 0 \\ -10b + 13c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} a + 4b - 2c = 0 \\ -10b + 13c = 0 \\ -3c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 10L_3 - L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-2, 7, -6))$ est libre.

- b) **La famille $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}[X]$?**

On remarque que : $(1 + X + X^2) + (3 + X + 5X^2) = 2 \times (2 + X + 3X^2)$.

On peut donc en déduire que la famille est liée.

- EXERCICE 9 -

- **La famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3))$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$?**

Cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.

- **La famille $((3, 3, 3))$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$?**

Cette famille est constituée d'un vecteur non nul donc elle est libre.

- EXERCICE 10 -

1. **Déterminer les coordonnées du vecteur $(7, 4, 1)$ dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.**

On remarque (en regardant les 0 dans les vecteurs) que :

$$(7, 4, 1) = 4(1, 1, 0) + 3(1, 0, 1) - 2(0, 0, 1)$$

Ainsi, les les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (7, 4, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont : $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. **Déterminer le polynôme P de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1; (X - 1); (X - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.**

Par définition des coordonnées d'un vecteur dans une base, on a :

$$P(X) = 0 + 1.(X - 1) + 1.(X - 1)^2 = (X - 1)(1 + X - 1) = X^2 - X$$

3. **Soit E un espace vectoriel admettant pour base la famille : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.**

Écrire la matrice colonne des coordonnées du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_4$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Par définition des coordonnées d'un vecteur dans une base, on a : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 11 -

1. **Soit $e_1 = (1, 2, -3)$, $e_2 = (-2, 0, 5)$ et $e_3 = (0, 4, -1)$. Trouver une base de $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.**

- $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F .

- On peut remarquer directement que : $2e_1 + e_2 = e_3$ et donc conclure que la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre. On a alors :

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2) \quad \text{car } e_3 = 2e_1 + e_2$$

Ainsi, la famille (e_1, e_2) engendre F . De plus, elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. Donc c'est une base de F .

Remarque : Si on ne trouve pas de tête que la famille est liée, on vérifie à la main si cette famille est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 &\iff (a - 2b, 2a + 4c, -3a + 5b - c) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ -3a + 5b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 4b + 4c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -b - c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 4b + 4c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -c & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a une infinité de solution donc la famille (e_1, e_2, e_3) e n'est pas libre.

- Montrer que** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ **est un espace vectoriel et en déterminer une base** $\mathcal{B}$.

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\vec{u} \in E \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - z \end{cases} \iff \vec{u} = (y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

donc $E = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ainsi, la famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ engendre E . De plus, elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. Donc c'est une base de E .

- EXERCICE 12 -

Montrer que l'ensemble $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ **des matrices symétriques de** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **est un espace vectoriel puis en déterminer une base et sa dimension.**

- Déterminons une famille génératrice de $\mathcal{S}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathcal{S} \iff {}^tM = M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \iff \begin{cases} b = c \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Ainsi, $M \in \mathcal{S} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + dM_3$.

Donc $\mathcal{S} = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ et (M_1, M_2, M_3) est une famille génératrice de $\mathcal{S}$.

De plus, cette famille est clairement libre (0 échelonnés) donc c'est une base de $\mathcal{S}$ et $\dim(\mathcal{S}) = 3$.

- EXERCICE 13 -

- La famille** $\mathcal{F}_1 = ((1, 2); (2, 1); (1, 1))$ **est-elle libre dans** $\mathbb{R}^2$?

La famille $\mathcal{F}_1$ est composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 2 donc elle est liée.

- La famille** $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 1); (1, 2, 1))$ **est-elle génératrice dans** $\mathbb{R}^3$?

La famille $\mathcal{F}_2$ est composée de 2 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc elle ne peut pas engendrer cet espace.

- EXERCICE 14 -

- Montrer que la famille** $\mathcal{F}_1 = ((4; -1; 0); (0; 2; 2); (1; -1; -1))$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille $\mathcal{F}_1$ est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} a(4, -1, 0) + b(0, 2, 2) + c(1, -1, -1) = (0, 0, 0) &\iff (4a + c, -a + 2b - c, 2b - c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 4a + c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4a + c = 0 \\ 8b - 3c = 0 & L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4a + c = 0 \\ 8b - 3c = 0 \\ 11c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_1$ est libre et elle est composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\mathbb{R}^3$) donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Montrer que la famille** $\mathcal{F}_2 = (1; X - 1; (X - 1)^2)$ **est une base de** $\mathbb{R}_2[X]$.

- Résultat à retenir : Une famille formée de polynômes de degrés échelonnés est libre.

Ici, la famille $\mathcal{F}_2 = (1; X - 1; (X - 1)^2)$ est composée de trois polynômes de degrés échelonnés (degrés 0, 1 et 2 respectivement) donc elle est libre. Étant composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\mathbb{R}_2[X]$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- EXERCICE 15 -

Soit $\mathcal{F} = \text{Vect}((1, 2), (2, 1))$. **Montrer que** $F = \mathbb{R}^2$.

- $F \subset \mathbb{R}^2$.

- La famille $((1, 2), (2, 1))$ est libre et engendre $\mathcal{F}$ donc c'est une base de $\mathcal{F}$. Ainsi, $\dim(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Ces deux points permettent de conclure que $F = \mathbb{R}^2$.

- EXERCICE 16 -

On considère la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ **de** $\mathbb{R}^3$ **avec** $\vec{u} = (1, 3, -3)$, $\vec{v} = (4, 2, -3)$ **et** $\vec{w} = (-1, 7, -6)$.

Calculer : $-3\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ **puis en déduire le rang de la famille** $\mathcal{F}$.

On a : $-3\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ donc au passage, la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{F}) &= \text{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \text{rg}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{car } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est liée} \\ &= 2 \quad \text{car la famille } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est libre : deux vecteurs non colinéaires} \end{aligned}$$

Ainsi : $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

- EXERCICE 17 -

Déterminer le rang des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Avec des notations évidentes :

- Comme $C_2 = -C_1$, on a : $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_3) = 2$ car (C_1, C_3) est libre.

-

$$\begin{aligned} \text{rg}(B) &= \text{rg}(C_1, C_2, C_3) \\ &= \text{rg}(C_1, C_2) \quad \text{car } C_3 = C_1 - C_2 \\ &= 2 \quad \text{car la famille } (C_1, C_2) \text{ est libre.} \end{aligned}$$