

- EXERCICE 1 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, **et, pour $n \in \mathbb{N}$,** $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 1$.

Par récurrence.

- Initialisation. $u_0 = 1 \geq 1$.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que $u_n \geq 1$.

En particulier, $u_n \neq 0$ donc $\frac{1}{u_n}$ est bien défini donc u_{n+1} existe.

De plus, $\frac{1}{u_n} > 0$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \geq u_n \geq 1$ par HR.

- Conclusion. ...

- EXERCICE 2 -

Soit $f : x \mapsto x^2 \ln(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, **et, pour $n \in \mathbb{N}$,** $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée ($1+x > 0$) et produit de fonctions dérivables et on a pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{x+1}$$

Or, $\forall x \geq 0$, $1+x \geq 1$ donc $\ln(1+x) \geq 0$ (croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+$) donc $f'(x) \geq 0$ comme somme de termes positifs.

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ puis étudier la monotonie de la suite (u_n) .**

- Une récurrence simple permet de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

En effet, $u_0 \geq 0$ et si $u_n \geq 0$, alors $1+u_n \geq 1$ donc $\ln(1+u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 \ln(1+u_n) \geq 0$ par produit.

- La fonction f étant croissante et u_0 connu, on peut conjecturer la monotonie de la suite en comparant u_0 et u_1 .

On a : $u_1 = \ln(2) \leq 1 = u_0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$.

- ★ Initialisation. $u_1 = \ln(2) \leq 1 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.

- ★ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} \leq u_n \iff f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \iff u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- ★ Conclusion. ...

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

- EXERCICE 3 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0; 1]$.

- Initialisation. $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

On a par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leq u_n \leq 1 \iff 0 \leq u_n^2 \leq 1 \iff 1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2 \iff \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Conclusion. ...

2. **Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$

(par continuité de $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$). On a alors :

$$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- EXERCICE 4 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, **et pour tout $n \in \mathbb{N}$,** $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis montrer (par l'absurde) qu'elle diverge vers $+\infty$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ d'après l'exercice 1 donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- Montrons par l'absurde que cette suite n'est pas majorée.

Supposons donc que cette suite soit majorée. On a alors : (u_n) est strictement croissante et majorée donc elle converge vers une limite ℓ finie. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient alors :

$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ soit $\frac{1}{\ell} = 0$ ce qui est absurde.

Donc l'hypothèse de départ est fausse et la suite n'est pas majorée.

Finalement, la suite (u_n) est strictement croissante et non majorée donc elle diverge vers $+\infty$.

- EXERCICE 5 -

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ **et pour tout entier n :** $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2) = f(u_n)$.

1. **Étudier les variations de f et montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.**

La fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}(2 - x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ est une fonction polynomiale de degré 2, avec $a = -\frac{1}{4} < 0$ donc (par propriétés de ces fonctions), elle est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ (sommet en $-b/2a = 2$) et strictement décroissante sur $[2, +\infty)$. Une étude de dérivée aboutit bien sur au même résultat.

Comme f est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, elle réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[f(1), f(2)] = [5/4, 3/2] \subset [1, 2]$.

Ainsi, on a bien : $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

2. **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

Le résultat de la question précédente donne le résultat par récurrence immédiate :

$u_0 = 1$ et si $u_n \in [1, 2]$, alors : $u_{n+1} = f(u_n) \in f([1, 2]) \subset [1, 2]$ soit $u_{n+1} \in [1, 2]$.

Remarque : On peut aussi montrer ce résultat par récurrence : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $1 \leq u_n \leq 2$.

- Initialisation. $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai : $1 \leq u_n \leq 2$.

Comme f est croissante sur $[1, 2]$, on a :

$$1 \leq u_n \leq 2 \iff f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \iff 1 \leq 5/4 \leq u_{n+1} \leq 3/2 \leq 2 \text{ donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

- Conclusion. ...

3. **Montrer que si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , alors $\ell = \sqrt{2}$.**

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , alors :

- D'une part, $\ell \geq 1$ car $u_n \geq 1$

- D'autre part, comme f est continue, ℓ vérifie la relation :

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell + \frac{1}{4}(2 - \ell^2) \iff 2 - \ell^2 = 0 \iff \begin{cases} \ell = \sqrt{2} \\ \ell = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ impossible car } \ell \geq 1$$

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , alors $\ell = \sqrt{2}$.

4. **Montrer que :** $\forall t \in [1; 2], |f'(t)| \leq \frac{1}{2}$.

f est dérivable sur $[1, 2]$ et on a pour tout t de $[1, 2]$: $f'(t) = -\frac{1}{2}t + 1$.

Or : $1 \leq t \leq 2 \iff -1 \leq -\frac{1}{2}t \leq -\frac{1}{2} \iff 0 \leq -\frac{1}{2}t + 1 \leq \frac{1}{2}$ ce qui donne : $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$.

5. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :** $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

• La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$.

• $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1, 2]$

Comme u_n et $\sqrt{2}$ appartiennent à $[1, 2]$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$$

soit, avec $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ d'après les calculs de la question 3 :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$$

6. **En déduire que :** $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par récurrence.

• Initialisation. $|u_0 - \sqrt{2}| = |1 - \sqrt{2}| \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

• Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. On a :

$$\begin{aligned} &|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}| \quad \text{d'après la question précédente} \\ \iff &|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par HR} \\ \iff &|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

• Conclusion. ...

7. **Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (car $1/2 < 1$) donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - \sqrt{2}| = 0$.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \sqrt{2} = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{2}$.

- EXERCICE 6 -

En utilisant la suite (u_n) et l'inégalité $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ obtenue à l'exercice 5, écrire un programme en

Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

```
1 u = 1      # premier terme
2 n = 0      # indice
3 while (1/2)**n >= 10**(-5) :      #
4     u = u + (2-u**2)/4      # calcul des termes de la suite
5     n = n+1      # on augmente l'indice
6 print(u)
```

En sortie boucle on a : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$ donc à fortiori (d'après l'inégalité) $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-5}$.

La valeur de u_n en sortie de boucle est donc bien une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

- EXERCICE 7 -

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. (a) **Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + 18x > 0$$

Donc f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après le théorème de bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=]-4, +\infty[$.

De plus, $0 \in]-4, +\infty[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) **Vérifier que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[$.

Remarque : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est implicite. Elle est définie par la relation $f_n(u_n) = 0$. il faut donc travailler sur les images par f_n pour obtenir des informations sur u_n . Faire un tableau de variations pour visualiser cette situation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0 = f_n(u_n)$ par définition de u_n .

Ainsi :

$$\begin{aligned} &f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right) \\ \iff &u_n < \frac{2}{3} \quad \text{car } f_n \text{ est strictement croissante.} \end{aligned}$$

On a déjà vu que : $u_n > 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[$.

2. (a) **Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a :** $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
Soit $x \in]0, 1[$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1) < 0 \quad \text{par produit car } x < 1 \text{ et } x^n > 0$$

Donc : $\forall x \in]0, 1[, f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

(b) **En déduire que $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.**

Comme $u_n \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[$, on a $u_n \in]0, 1[$ et on peut choisir $x = u_n$ dans la relation précédente. Ainsi :

$$f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

Mais, par définition, on a : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n)$. La relation précédente donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$$

et comme f_n est strictement croissante, on en déduit que : $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n .
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

(c) **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.**

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle converge vers un réel ℓ .

3. (a) **Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} \iff 0 \leq (u_n)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ car la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Or, comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème d'e gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0$.

(b) **En revenant à la définition de u_n , déterminer la valeur de ℓ .**

Pour faire apparaître $(u_n)^n$, il faut utiliser la fonction f_n . Ainsi, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \iff (u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$$

Par passage à la limite, on obtient : $0 + 9\ell^2 - 4 = 0$ soit $\ell^2 = \frac{4}{9}$ donc $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell \geq 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.