

- EXERCICE 1 -
Soit g l'application $g: \begin{matrix} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0)) \end{matrix}$. • Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}^2)$.

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)'(0)) \\ &= (P(0) + \lambda Q(0), P'(0) + \lambda Q'(0)) \\ &= (P(0), P'(0)) + \lambda (Q(0), Q'(0)) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, g est une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.

- EXERCICE 2 -
a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
Montrer que l'application $c_A: M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM - {}^tMA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
• Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} c_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - {}^t(M + \lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - ({}^tM + \lambda {}^tN)A \\ &= AM + \lambda AN - {}^tMA - \lambda {}^tNA \\ &= AM - {}^tMA + \lambda (AN - {}^tNA) \\ &= c_A(M) + \lambda c_A(N) \end{aligned}$$

Ainsi, c_A est une application linéaire.
• De plus, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $c_A(M) = AM - {}^tMA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit et somme de matrices.
Donc c_A est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Soit d l'application qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $d(P)(X) = P'(X) + XP''(X)$.
Montrer que $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
• Linéarité.
* Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} d(P + \lambda Q)(X) &= (P + \lambda Q)'(X) + X(P + \lambda Q)''(X) \\ &= P'(X) + \lambda Q'(X) + X(P''(X) + \lambda Q''(X)) \\ &= P'(X) + \lambda Q'(X) + XP''(X) + \lambda XQ''(X) \\ &= P'(X) + XP''(X) + \lambda (Q'(X) + XQ''(X)) \\ &= d(P) + \lambda d(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, d est une application linéaire.
* De plus, si $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X)$ est de degré au plus n , donc $P'(X)$ est de degré au plus $n - 1$ tout comme $XP''(X)$ donc on a : $d(P)(X) = P'(X) + XP''(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Donc d est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
• Cependant, d n'est pas surjective. En effet, le polynôme $R(X) = X^n$ (par exemple) n'a pas d'antécédent par d puisqu'on a vu que les images par d sont des polynômes de degré au plus $n - 1$.
Si d était surjective, il existerait un poynôme Q tel que $d(Q) = R$ avec $\deg(Q) \leq n - 1$ et $\deg(R) = n$, ce qui est absurde.
Donc d n'est pas un automorphisme.

- EXERCICE 3 -
Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$f(\vec{e}_1) = (1, 0); \quad f(\vec{e}_2) = (2, -1); \quad f(\vec{e}_3) = (-3, 1).$$

Calculer $f((1, -2, 0))$ puis pour tout $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(\vec{u})$ en fonction de x, y et z .

• La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Ainsi, le vecteur $(1, -2, 0)$ se décompose de la manière suivante : $(1, -2, 0) = 1(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.
Ainsi, par linéarité de f , on a :

$$\begin{aligned} f((1, -2, 0)) &= f(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \\ &= f(\vec{e}_1) - 2f(\vec{e}_2) \quad \text{par linéarité} \\ &= (1, 0) - 2(2, -1) = (-3, 2) \end{aligned}$$

Ainsi, $f((1, -2, 0)) = (-3, 2)$.

• De même, on a : $\vec{u} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ donc

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\ &= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) \quad \text{par linéarité} \\ &= x(1, 0) + y(2, -1) + z(-3, 1) \\ &= (x + 2y - 3z, -y + z) \end{aligned}$$

Ainsi, $f((x, y, z)) = (x + 2y - 3z, -y + z)$.

- EXERCICE 4 -
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, définie par $f(x, y, z, t) = (x - 2y + t, x - 2z + t, x - y - z + t)$.
Vérifier que $(1, 0, 0, -1) \in \text{Ker}(f)$ puis déterminer $\text{Ker}(f)$.

• Pour vérifier que $(1, 0, 0, -1) \in \text{Ker}(f)$, il faut calculer $f(1, 0, 0, -1)$ et vérifier que ça fait 0. On a :

$$f(1, 0, 0, -1) = (1 - 0 - 1, 1 - 0 - 1, 1 - 0 - 0 - 1) = (0, 0, 0) \quad \text{donc } (1, 0, 0, -1) \in \text{Ker}(f)$$

• Pour déterminer $\text{Ker}(f)$, il faut chercher l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $f(\vec{u}) = 0$. Il s'agit donc de résoudre cette équation. On a pour $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \vec{u} = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \iff (x - 2y + t, x - 2z + t, x - y - z + t) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ x - 2z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ y = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2z - t \\ y = z \end{cases} \\ &\iff \vec{u} = (2z - t, z, z, t) = z(2, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.

- EXERCICE 5 -
1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)) = \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) \\ &= \text{Vect}((0, -1, 1), (1, 0, -1), (-1, 1, 0)) \\ &= \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \\ &= \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \quad \text{car } \vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. De plus, elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. On considère l'application $g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $M \longmapsto AM$.

Déterminer une base de $\text{Im}(g)$.

On commence par déterminer l'image de g . En utilisant la base canonique

$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(M_1), g(M_2), g(M_3), g(M_4)) \\ &= \text{Vect}(AM_1, AM_2, AM_3, AM_4) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}(M_1 + M_3, M_2 + M_4) \end{aligned}$$

donc la famille $(M_1 + M_3, M_2 + M_4)$ est génératrice de $\text{Im}(g)$. De plus elle est libre car ces deux matrices sont non colinéaires donc c'est une base de $\text{Im}(g)$.

- EXERCICE 6 -

L'application linéaire $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$: $P \longmapsto (P(1), P'(1), P(0))$ est-elle injective ?

Déterminons $\text{Ker}(f)$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] : P(X) = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff (P(1), P'(1), P(0)) = (0, 0, 0) \\ &\iff (a + b + c, 2a + b, c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.

- EXERCICE 7 -

On considère l'application g de l'exercice 5.

1. Déterminer le rang de g puis la dimension du noyau de g . g est-elle injective ?

On a vu dans l'exercice 5 que la famille $(M_1 + M_3, M_2 + M_4)$ est une base de $\text{Im}(g)$ donc $\text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(g)) =$

2.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \quad \text{donc} \quad \dim(\text{Ker}(g)) + 2 = 4$$

Ainsi, $\dim(\text{Ker}(g)) = 2$ donc $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ et on en conclut que g n'est pas injective.

2. On note (M_1, M_2, M_3, M_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $g(M_1 - M_3)$ et $g(M_2 - M_4)$ puis déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.

On a par linéarité de g et d'après les calculs déjà faits dans l'exercice 5 :

$$\bullet \quad g(M_1 - M_3) = g(M_1) - g(M_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bullet \quad \text{De même : } g(M_2 - M_4) = 0.$$

Ainsi, $(M_1 - M_3) \in \text{Ker}(g)$ et $(M_2 - M_4) \in \text{Ker}(g)$.

La famille $(M_1 - M_3, M_2 - M_4)$ est donc une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) composée de deux vecteurs de $\text{Ker}(g)$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\text{Ker}(g)$.

- EXERCICE 8 -

1. L'application linéaire $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$: $P \longmapsto (P(1), P'(1), P(0))$ de l'exercice 6 est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

On a vu dans l'exercice 6 que f est injective. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit (dimension finie) que f est bijective. Ainsi, f est un isomorphisme mais ce n'est pas un automorphisme car les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

2. L'application linéaire $g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (c, a + d, b - c, c)$ est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

Déterminons $\text{Ker}(g)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(g) &\iff g(M) = 0 \\ &\iff (c, a + d, b - c, c) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ d = -a \\ b = 0 \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ donc g n'est pas injective donc elle n'est pas bijective. Ainsi, g n'est ni un isomorphisme ni un automorphisme.

3. L'application linéaire $h: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$: $P \longmapsto P + P'$ est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

Déterminons $\text{Ker}(h)$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] : P(X) = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(h) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff P + P' = 0 \\ &\iff aX^2 + bX + c + 2aX + b = 0 \\ &\iff aX^2 + (b + 2a)X + c + b = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + 2a = 0 \\ c + b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases} \iff P = 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(h) = \{0\}$ donc h est injective.

Ainsi, h est un endomorphisme injectif en dimension finie ($\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$) donc h est bijectif. C'est donc un isomorphisme et un automorphisme.

- EXERCICE 9 -
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base du noyau de A .

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A) &\iff AX = 0 \iff \begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ &\iff \begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = cU \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(U)$. La famille (U) est génératrice de $\text{Ker}(A)$ et elle est libre (un vecteur non nul) donc (U) est une base de $\text{Ker}(A)$.

- EXERCICE 10 -
On considère la matrice A de l'exercice 9.

1. Déterminer le rang de A .

On a avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(C_1, C_2, C_3) \\ &= \text{rg}(C_1, C_2) \quad \text{car } C_3 = -C_1 - C_2 \\ &= 2 \quad \text{car } C_1, C_2 \text{ ne sont pas colinéaires} \end{aligned}$$

2. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AU puis en déduire $\text{Ker}(A)$.

On trouve $AU = 0$.

D'après le théorème du rang, on a avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (donc $n = 3$) :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 3$$

donc $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1$.

Or, $U \in \text{Ker}(A)$ et $U \neq 0$ donc la famille (U) est une famille libre composée de 1 vecteur de $\text{Ker}(A)$ qui est de dimension 1 donc c'est une base de $\text{Ker}(A)$. Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(U)$.

3. La matrice A est-elle inversible ?

$\text{Ker}(A) = \text{Vect}(U) \neq \{0\}$ donc A n'est pas inversible.