

- EXERCICE 1 -

a) **Soit $\alpha \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ selon les valeurs de α .**

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-\alpha t} dt &= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$ et dans ce cas, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

b) **Soit $\alpha \neq 1$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ selon les valeurs de α .**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt &= \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x \quad \text{car } \alpha \neq 1 \\ &= \frac{1}{-\alpha+1} (x^{-\alpha+1} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } -\alpha+1 > 0 \\ +\infty & \text{si } -\alpha+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas, on a : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}$.

- EXERCICE 2 -

Étudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$.

La fonction $x \mapsto e^{-|x-1|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ par composition donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour obtenir une primitive, on va chercher à se débarrasser des valeurs absolues.

$$\text{Or, on a : } |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{si } x-1 \leq 0 \\ (x-1) & \text{si } x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{et donc } e^{-|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ e^{-x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

On va donc choisir 1 comme point pivot.

• Étude de $\int_{-\infty}^1 e^{-|x-1|} dx$. Soit $B < 1$. On a :

$$\begin{aligned} \int_B^1 e^{-|x-1|} dx &= \int_B^1 e^{x-1} dx \quad \text{d'après l'étude précédente} \\ &= [e^{x-1}]_B^1 = 1 - e^{B-1} \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} 1 \end{aligned}$$

donc l'intégrale $\int_{-\infty}^1 e^{-|x-1|} dx$ converge et vaut 1.

• Étude de $\int_1^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$. Soit $A > 1$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^A e^{-|x-1|} dx &= \int_1^A e^{-x+1} dx \quad \text{d'après l'étude précédente} \\ &= [-e^{-x+1}]_1^A = -e^{-A+1} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$ converge et vaut 1.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$ converge et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-1|} dx = \int_{-\infty}^1 e^{-|x-1|} dx + \int_1^{+\infty} e^{-|x-1|} dx = 1 + 1 = 2$.

- EXERCICE 3 -

1. **Montrer que l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge et vaut 1.**

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $]1, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ est impropre en $+\infty$.

Soit $a > 1$.

Soient : $u(t) = \ln t$ ($u'(t) = \frac{1}{t}$) et $v(t) = -\frac{1}{t}$ ($v'(t) = \frac{1}{t^2}$). Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ donc sur $[1, a]$ donc on a par IPP :

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{\ln t}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^a + \int_1^a \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln a}{a} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^a \\ &= -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a} + 1 \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{par CC et somme} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge et : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = 1$.

2. **On admet que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que $\int_m^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ converge et est égale à I .**

La fonction $x \mapsto e^{-(x-m)^2}$ est continue sur $[m, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_m^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > m$. Effectuons le changement de variable $u = x - m$ sur l'intégrale $\int_m^A e^{-(x-m)^2} dx$.

On a : $du = dx$ et si $x : m \rightarrow A$, alors $u : 0 \rightarrow A - m$, ce qui donne :

$$\int_m^A e^{-(x-m)^2} dx = \int_0^{A-m} e^{-u^2} du$$

ce qui donne en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_m^A e^{-(x-m)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{A-m} e^{-u^2} du = I$$

ce qui montre que $\int_m^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ converge et est égale à I .

- EXERCICE 4 -

1. **Minorer $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t}$ sur $[1, +\infty[$ puis déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$.**

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$ est impropre en $+\infty$.

• On a pour $t \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} t \geq 1 &\implies t^2 + 1 \geq 2 \\ &\implies \ln(t^2 + 1) \geq \ln(2) \quad \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \frac{\ln(1+t^2)}{t} \geq \frac{\ln(2)}{t} \end{aligned}$$

• L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(2)}{t} dt = \ln(2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$).

• Les fonctions sont continues et positives.

Donc d'après le TCIFP par inégalité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$ diverge également.

2. **Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2}$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.**

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ par CC.

- La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est impropre en $+\infty$.

- ★ On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t^2} = 0 \iff e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi, $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

- ★ L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Attention à ne pas écrire : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge ce qui est faux (en commençant à 0).

- ★ Les fonctions sont continues et positives.

Donc d'après le TCIFP par négligeabilité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

De plus, l'intégrale $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ converge (elle n'est pas impropre car $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$).

Donc d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

3. **Déterminer un équivalent de $\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}$ en $+\infty$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} dt$ suivant les valeurs de α .**

La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} dt$ est impropre en $+\infty$.

- On a : $(1+t)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} t^\alpha$ donc par quotient $\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{1/2}}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1/2}}$

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1/2}} dt$ converge ssi $\alpha - 1/2 > 1$ ssi $\alpha > 3/2$.

- Les fonctions sont continues et positives.

Donc d'après le TCIFP par équivalent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 3/2$.

De plus, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} dt$ converge (elle n'est pas impropre).

Donc d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge ssi $\alpha > 3/2$.

4. **Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $[-\infty, 0[$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$ est impropre en $-\infty$.

- On a : $1+t+t^2 \underset{-\infty}{\sim} t^2$ donc par quotient $\frac{1}{1+t+t^2} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$).

- Les fonctions sont continues et positives au voisinage de $-\infty$.

Donc d'après le TCIFP par équivalent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t+t^2} dt$ converge

De plus, l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$ converge (elle n'est pas impropre).

Donc d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$ converge.

- EXERCICE 5 -

a) **Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ en utilisant le résultat de l'exercice 4.**

On remarque que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge ssi $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Or, on a vu dans l'exercice 4 que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

On en déduit par parité que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

b) **Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$.**

On remarque que la fonction $t \mapsto t e^{-t^2}$ est impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge ssi $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge.

Cette dernière intégrale est impropre en $+\infty$ Soit $x > 0$, on a :

$$\int_0^x t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge et par imparité : $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0$.