

- EXERCICE 1 -**Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.**

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)}{5^n}$$

On a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n(n+1)}{5^n} &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(p-1)p}{5^{p-1}} \quad \text{par chgt d'indice } p = n+1 \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} (p-1)p \left(\frac{1}{5}\right)^{p-1} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{p=1}^{n+1} p(p-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{p-2} \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{1}{5} < 1$, la série $\sum p(p-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{p-2}$ converge (série géométrique dérivée seconde) et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{5^k} &= \frac{1}{5} \sum_{p=1}^{+\infty} p(p-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{p-2} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{(1-1/5)^3} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{(4/5)^3} = \frac{25}{32} \end{aligned}$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{(n+1)!} &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^{k-1}}{k!} \quad \text{par chgt d'indice } k = n+1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) \end{aligned}$$

On reconnaît ici la série exponentielle avec $x = 2$ donc cette série est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$3. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{n!}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a en remarquant que $n^2 = n(n-1) + n$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + n}{n!} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1) + 2n}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)}{n!} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} \end{aligned}$$

La première somme peut démarrer à $n = 2$ car les deux premiers termes sont nuls et la deuxième somme à $n = 1$ car le premier terme est nul. Il est nécessaire de faire cette transformation avant de simplifier à l'étape suivante.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + n}{n!} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{N-2} \frac{1}{p!} + 2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \quad \text{par changement d'indice} \end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes partielles de la série exponentielle (avec $x = 1$) qui est toujours convergente.Donc $\sum \frac{n^2 + n}{n!}$ est une série convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n}{n!} = e^1 + 2e^1 + e^3 = 3e$$

- EXERCICE 2 -1. **Déterminer a et b tels que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}$ puis en déduire la nature de la série :** $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.On a, en mettant sous même dénominateur et par identification : $\forall n \geq 2$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} \iff \frac{1}{n(n-1)} = \frac{-a + (a+b)n}{n(n-1)}$$

Ce qui donne par identification : $1 + 0 \cdot n = \underbrace{-a}_{=1} + \underbrace{(a+b)n}_{=0} : \begin{cases} -a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$.Ainsi : $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.On a alors pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \quad \text{somme télescopique} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.2. **Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right)$.**

On va faire apparaître une somme télescopique.

On a : $\ln \left(\frac{n+2}{n} \right) = \ln(n+2) - \ln(n)$, ce qui donne pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) &= \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n) \\ &= \ln(N+2) + \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(1) \quad \text{somme télescopique à deux crans d'écart} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{par somme} \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right)$ diverge.**- EXERCICE 3 -**a) **Déterminer un équivalent de $v_n = 2\sqrt{n} \left(\exp \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right)$ puis en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.**Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$, on a : $\exp \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \sim \frac{1}{n}$ et donc : $2\sqrt{n} \left(\exp \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right) \sim \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n^{1/2}}$ par produit.• On a donc : $v_n \sim \frac{2}{n^{1/2}}$.• Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^{1/2}} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ est divergente ($\alpha = 1/2 < 1$).

• Les séries sont à termes positifs.

Donc d'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge également.

b) **Déterminer la limite de $n^3 e^{-n^2}$ puis en déduire la nature de la série de terme général : $u_n = n e^{-n^2}$.**

On a, en posant $k = n^2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 e^{-n^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{3/2} e^{-k} = 0$ par CC.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \times n e^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n e^{-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ et donc que $n e^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- On a vu que : $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$).

- Les séries sont à termes positifs.

Donc d'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge également.

- EXERCICE 4 -

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

La suite n'étant pas de signe constant, on étudie la convergence absolue. On a :

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{par produit et quotient}$$

- On a vu que : $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$.

- Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$).

- Les séries sont à termes positifs.

Donc d'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ converge également.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument donc elle converge.