

- EXERCICE 1 -

Soit $P(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? dans la base $(1, (X-1), (X-1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$? dans la base $((X-1)^2, (X-1), 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

- On a en développant : $P(X) = 2X^2 - 7X + 1$ donc le vecteur colonne associé à P dans la base canonique

$$(1, X, X^2) \text{ de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- On a : $P(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$ donc le vecteur colonne associé à P dans la base canonique $\mathcal{B} =$

$$(1, (X-1), (X-1)^2) \text{ de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- On a : $P(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$ donc le vecteur colonne associé à P dans la base canonique $\mathcal{B}' =$

$$((X-1)^2, (X-1), 1) \text{ de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- EXERCICE 2 -

- a) **On considère l'application linéaire : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (x - y, 0)$.**

Déterminer la matrice A de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1))$.

On a alors en notant $\mathcal{B}' = (f_1, f_2) = ((1, 0); (0, 1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

- $f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (1, 0) = 1f_1 + 0f_2$
- $f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (-1, 0) = -1f_1 + 0f_2$
- $f(e_3) = f((0, 0, 1)) = (0, 0) = 0f_1 + 0f_2$

ce qui donne : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM$.**

Déterminer la matrice B de l'endomorphisme φ_A relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a en notant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- $\varphi_A(M_1) = AM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_1$
- $\varphi_A(M_2) = AM_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_1$
- $\varphi_A(M_3) = AM_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2M_1 - M_3$
- $\varphi_A(M_4) = AM_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2M_2 - M_4$

Ainsi, on obtient $B = \mathcal{M}_{b,c}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- c) **Soit E un espace vectoriel admettant $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ comme base et soit f l'endomorphisme de E dont**

la matrice dans la base $\mathcal{B}_E$ est la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1 , e_2 et e_3 .

On a par définition de $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$: $f(e_1) = -e_1$; $f(e_2) = e_1 - 2e_2$; $f(e_3) = e_2$.

- EXERCICE 3 -

1. **Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

- (a) **On considère le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$. Calculer $f(P)$.**

Comme on ne connaît l'endomorphisme f qu'à travers sa matrice, on va raisonner matriciellement.

- Méthode 1 :**

On commence par déterminer les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Notons Z le vecteur des coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\text{Comme } P(X) = X^2 - 2X + 1, \text{ on a : } Z = \mathcal{M}_{b,c}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On calcule alors : } AZ = \mathcal{M}_{b,c}(f(P)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, comme $A = \mathcal{M}_{b,c}(f)$, on en déduit que $f(P)(X) = 3X$.

- Méthode 2 :**

Comme $A = \mathcal{M}_{b,c}(f)$, on a, en notant $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ la b.c de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f(P_0)(X) = 2P_0(X) = 2; \quad f(P_1)(X) = P_0(X) - 2P_1(X) = -2X + 1; \quad f(P_2)(X) = -P_1(X) = -X$$

On a alors par linéarité de f :

$$f(X^2 - 2X + 1) = f(P_2 - 2P_1 + P_0) = f(P_2) - 2f(P_1) + f(P_0) = -X - 2(-2X + 1) + 2 = 3X$$

- (b) **Déterminer $\text{Im}(f)$.**

Déterminons $\text{Im}(f)$

- Méthode 1 :**

On a : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1; C_2; C_3) = \text{Vect}(C_2; C_3)$ car $C_1 = 2C_2 - 4C_3$.

donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et comme $A = \mathcal{M}_{b,c}(f)$, on a : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 - 2X; -X)$.

On peut simplifier l'écriture par combinaisons linéaires : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 - 2X; -X) = \text{Vect}(1; X)$.

- Méthode 2 :**

On a : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(P_0); f(P_1); f(P_2))$ avec $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Or, comme $A = \mathcal{M}_{b,c}(f)$, on a :

$$f(P_0) = 2; \quad f(P_1) = 1 - 2X; \quad f(P_2) = -X$$

Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(2; 1 - 2X; -X) = \text{Vect}(2; -X)$ car $1 - 2X = 1/2(2) + 2(-X)$.

2. **Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

- (a) **On admet que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.**

Notons $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$ et U , V et W leurs vecteurs coordonnés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Comme $B = \text{Mat}_{b,c}(g)$, le vecteur $g(u)$ est représenté matriciellement par BU .

$$\text{Comme } BU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ on en déduit que } g(u) = 0 = 0u + 0v + 0w.$$

- De même, comme $BV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, on en déduit que $g(v) = 0 = 0u + 0v + 0w$.

- De même, comme $BW = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3W$, on en déduit que $g(w) = 3w = 0u + 0v + 3w$.

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) **Déterminer** $\text{Im}(g)$.

- Méthode 1 :

En utilisant la base canonique (e_1, e_2, e_3) , on a en utilisant $B = \text{Mat}_{b,c}(g)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice de $\text{Im}(g)$ et elle est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de $\text{Im}(g)$.

- Méthode 2 :

En utilisant la base (u, v, w) , on a d'après le calculs précédents :

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(u), g(v), g(w)) \\ &= \text{Vect}(0, 0, 3w) \\ &= \text{Vect}(w) \end{aligned}$$

La famille (w) est génératrice de $\text{Im}(g)$ et elle est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de $\text{Im}(g)$.

- Méthode 3 :

On a : $\text{Im}(B) = \text{Vect}(C_1; C_2; C_3) = \text{Vect}(C_1)$ car $C_1 = C_2 = C_3$.

donc $\text{Im}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et comme $B = \mathcal{M}_{b,c}(g)$, on a : $\text{Im}(g) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

- EXERCICE 4 -

On considère les endomorphismes f et g définis dans l'exercice 3.

1. **Soit** $u = (0, 1, -1)$. **Montrer que** $u \in \text{Ker}(g)$.

Raisonnons matriciellement.

$$\text{On a : } BU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \text{ donc } U \in \text{Ker}(B).$$

Comme $B = \text{Mat}_{b,c}(g)$, on en déduit que $u \in \text{Ker}(g)$.

2. **Déterminer** $\text{Ker}(f)$ **et** $\text{Ker}(g)$.

- Pour déterminer $\text{Ker}(f)$, on commence par déterminer $\text{Ker}(A)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff \dots \iff X = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ donc comme } A = \text{Mat}_{b,c}(f), \text{ on a } \text{Ker}(f) = \text{Vect}(1 - 2X + 4X^2).$$

- De même, pour déterminer $\text{Ker}(g)$, on commence par déterminer $\text{Ker}(B)$. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \text{Ker}(B) \iff BX = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \iff X = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ donc comme } B = \text{Mat}_{b,c}(g), \text{ on a : } \text{Ker}(g) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

- EXERCICE 5 -

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{rg}(f)$. f **est-il** **bijectif**?

Déterminons $\text{rg}(A)$. On a, avec des notations évidentes :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$$

car $C_3 = C_1$ et (C_1, C_2) est libre (deux vecteurs non colinéaires).

Comme $A = \text{Mat}_{b,c}(f)$, on a : $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$.

Enfin, comme $\text{rg}(f) = 2 \neq 3 (= \dim(\mathbb{R}^3))$, on en déduit que f n'est pas bijectif.

- EXERCICE 6 -

1. **Soient** $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ **et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :** $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)v$.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique. f est-il un automorphisme ?

On a :

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = (1) \times v = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

$$\text{ce qui donne : } \mathcal{M}_{b,c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de f n'est pas inversible (les colonnes sont toutes égales) donc f n'est pas un automorphisme.

2. **Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :** $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.

Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. φ est-il un automorphisme ?

On a, en notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3) = (1; X; X^2; X^3)$:

- $\varphi(P_0)(X) = P_0(X+1) = 1$
- $\varphi(P_1)(X) = P_1(X+1) = (X+1) = P_0 + P_1$
- $\varphi(P_2)(X) = P_2(X+1) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = P_0 + 2P_1 + P_2$
- $\varphi(P_3)(X) = P_3(X+1) = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3$

$$\text{ce qui donne : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible (car triangulaire sans zéro sur la diagonale) donc φ est bijectif donc c'est un automorphisme.