

Entrainement

Sujet 3

Exercice I

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q . Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

- On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i (resp. N_i) l'événement "la i -ème boule tirée est blanche (resp. noire)".

Étude de la variable X .

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
3. Vérifier par le calcul que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Étude de la variable Y .

5. Déterminer $Y(\Omega)$.
6. (a) Déterminer $P((X = 2) \cap (Y = 1))$.
(b) Pour tout entier $k \geq 3$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$.
(c) En utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{k \geq 2}$, déduire des deux questions précédentes que : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.
7. Soit $k \geq 2$.
(a) Montrer que $P([Y = k] \cap [X = j]) = 0$ pour tout entier $j \geq 2$ tel que $j \neq k + 1$.
(b) Déterminer $P([Y = k] \cap [X = k + 1])$.
(c) Déduire des deux questions précédentes que : $\forall k \geq 2, P(Y = k) = p^k q$.

Étude de la variable Z .

8. Justifier, sans aucun calcul, que : $P(Z = 1) = p(1 + q)$ et $P(Z = k) = q^k p$ pour tout $k \geq 2$.
9. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.
10. En déduire que YZ admet une espérance et donner sa valeur.

Entrainement

Sujet 3

Exercice I

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q . Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

- On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i (resp. N_i) l'événement "la i -ème boule tirée est blanche (resp. noire)".

Étude de la variable X .

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
3. Vérifier par le calcul que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Étude de la variable Y .

5. Déterminer $Y(\Omega)$.
6. (a) Déterminer $P((X = 2) \cap (Y = 1))$.
(b) Pour tout entier $k \geq 3$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$.
(c) En utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{k \geq 2}$, déduire des deux questions précédentes que : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.
7. Soit $k \geq 2$.
(a) Montrer que $P([Y = k] \cap [X = j]) = 0$ pour tout entier $j \geq 2$ tel que $j \neq k + 1$.
(b) Déterminer $P([Y = k] \cap [X = k + 1])$.
(c) Déduire des deux questions précédentes que : $\forall k \geq 2, P(Y = k) = p^k q$.

Étude de la variable Z .

8. Justifier, sans aucun calcul, que : $P(Z = 1) = p(1 + q)$ et $P(Z = k) = q^k p$ pour tout $k \geq 2$.
9. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.
10. En déduire que YZ admet une espérance et donner sa valeur.