

Entrainement

Sujet 4

Exercice 1

Soit x un réel de $]0; 1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour $t \in]0; 1[$: $\sum_{k=0}^{n-1} t^k$.
2. En intégrant la relation obtenue à la question précédente, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ puis en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
4. En déduire que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.
2. En déduire que : $\forall n \geq 2, \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$.
3. Calculer $\int_2^n f(t) dt$. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$.
4. Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.

Entrainement

Sujet 4

Exercice 1

Soit x un réel de $]0; 1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour $t \in]0; 1[$: $\sum_{k=0}^{n-1} t^k$.
2. En intégrant la relation obtenue à la question précédente, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ puis en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
4. En déduire que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.
2. En déduire que : $\forall n \geq 2, \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$.
3. Calculer $\int_2^n f(t) dt$. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$.
4. Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.