

Entrainement Sujet 5

Exercice I

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On considère la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que les quatre vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer pour tout entier naturel n , l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$)
- (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$U_{n+1} = MU_n$$

On admet que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- Exprimer MV_1 , MV_2 et MV_3 en fonction de V_1 , V_2 et V_3 .
- En déduire, pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

- En déduire la loi de la variable X_n .
- Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Reconnaître la loi de T_1 .
 - Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[T_2 = 2]$ et $\mathbb{P}[T_2 = 3]$.
 - (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction d'événements liés aux variables X_{n-1} et X_n .
 - (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}[T_2 = n] = 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

- Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.

Entrainement Sujet 5

Exercice I

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On considère la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que les quatre vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer pour tout entier naturel n , l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$)
- (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$U_{n+1} = MU_n$$

On admet que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- Exprimer MV_1 , MV_2 et MV_3 en fonction de V_1 , V_2 et V_3 .
- En déduire, pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

- En déduire la loi de la variable X_n .
- Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Reconnaître la loi de T_1 .
 - Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[T_2 = 2]$ et $\mathbb{P}[T_2 = 3]$.
 - (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction d'événements liés aux variables X_{n-1} et X_n .
 - (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}[T_2 = n] = 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

- Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.