

Entrainement

Sujet 7

Exercice I

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p , élément de $]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie I : un jeu naïf.

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

- Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier.
- En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du premier pile par le joueur A (resp. par le joueur B) lors de la k -ième manche.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k -ième manche ».

On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « le joueur A (resp. le joueur B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « le joueur A (resp. le joueur B) gagne le jeu à la n -ième manche ».

Étude de la première manche.

- (a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1 .
(b) Calculer la probabilité que le joueur A n'obtienne jamais pile.
(c) En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement.
On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.
- (a) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 puis montrer que : $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i)$.
(b) En déduire que : $P(E_1) = \frac{p}{1+q}$.
(c) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables.
En déduire que : $P(G_1) = \frac{q}{1+q}$.

Calcul de la probabilité de l'événement G .

- (a) Soit $n \geq 2$. Écrire l'événement G_n à l'aide de certains événements E_k et de l'événement $(X_n < Y_n)$.
(b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

- (c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.
- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} P(G_n)$ converge et déterminer sa somme.
(b) Exprimer l'événement G en fonction des événements G_n puis en déduire que : $P(G) = \frac{1}{2}$.
(c) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que : $P(E) = 0$.

Partie II : un autre jeu.

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

- (a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer que : $P(Y_1 = X_1 + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i-1}$.
(b) En déduire que : $P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}$.
(c) En déduire la probabilité que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note K_n l'événement « l'un des deux joueurs gagne à la n -ième manche par un lancer d'écart ».
(a) Exprimer l'événement K_n à l'aide de certains événements E_k , de X_n et de Y_n .
(b) En déduire que : $P(K_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}$.
- Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».