

- EXERCICE 1 -

1. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et donner son inverse.

2. On considère la matrice $P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

- EXERCICE 2 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .
- Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 3 -

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation $CX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 4 -

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $(B + I_4)X = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 5 -

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles sans utiliser le pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -12 \\ 4 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- EXERCICE 6 -

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $N = T - I_3$.

- La matrice T est-elle inversible?
- Calculer N^3 puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de T^n en fonction de I et de N .
- Calculer $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$ puis en déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2 .

- EXERCICE 7 -

Soit A, T et P trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation : $T = P^{-1}AP$.

Établir l'équivalence suivante pour toute matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

Pour aller plus loin...**- EXERCICE 8 -**

Soit A une matrice inversible vérifiant : $3A^3 + 2A^2 - A = 0$.

Déterminer A^{-1} .

- EXERCICE 9 -

Soit A une matrice nilpotente, c'est-à-dire vérifiant : il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$.

Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.

- EXERCICE 10 -

On dit que deux matrices carrées A et B commutent si et seulement si $AB = BA$.

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

- EXERCICE 11 -

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Exprimer J^2 en fonction de J , puis pour tout $n \geq 2$, J^n en fonction de J .
- En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de M^n en fonction de I et de J .
On trouve : $M^n = I + \frac{4^n - 1}{3}J$.

- EXERCICE 12 -

Soit n un entier ($n \geq 2$) et J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On pose $M = J - I_n$.

- La matrice J est-elle inversible?
- Exprimer J^2 en fonction de J et de n .
- En déduire une expression de M^2 en fonction de M, I_n et n .
- En déduire que la matrice M est inversible et donner son inverse.
- La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible?

- EXERCICE 13 -

On rappelle que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$.

Soit A une matrice inversible.

Montrer que tA est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.