

- EXERCICE 1 -

1. **On considère la matrice** $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et donner son inverse.

On obtient après calculs : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **On considère la matrice** $P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

On applique la méthode du pivot de Gauss pour transformer P_y en une matrice triangulaire équivalente.

On obtient :

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{ puis } L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & y+1 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice triangulaire qui est inversible ssi ses éléments diagonaux sont non nuls.

Ainsi, elle est inversible ssi $y+1 \neq 0$ ssi $y \neq -1$. On en déduit que P_y est inversible ssi $y \neq -1$.

- EXERCICE 2 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

1. **Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .**

On trouve : $A^2 - 4A = -3I$ et en isolant le I à droite puis en factorisant par A , on obtient : $A \left(-\frac{1}{3}(A - 4I) \right) = I$

donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 4I)$.

Remarque : Attention lors de la factorisation à ne pas écrire $(A - 4)$ qui n'a aucun sens (soustraction d'une matrice et d'un réel).

2. **Résoudre l'équation** $AX = X$, **d'inconnue** $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On obtient après calculs en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = X \iff \dots \iff X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cf fiche pour les détails (même exemple).

- EXERCICE 3 -

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. **Résoudre l'équation** $CX = 0$, **d'inconnue** $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On obtient après calculs en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et après les opérations $L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\bullet CX = 0 \iff \dots \iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- EXERCICE 4 -
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **et on note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.**

Résoudre l'équation $(B + I_4)X = 0$, **d'inconnue** $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On obtient après calculs :

$$(B + I_4)X = 0 \iff \begin{cases} 2a & +2c & = & 0 \\ & 2b & +2d & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c & = & -a \\ d & = & -b \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

- EXERCICE 5 -

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles sans utiliser le pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -12 \\ 4 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. A est non inversible car elle possède une colonne nulle (ou deux colonnes proportionnelles).

2. B est inversible car c'est une matrice diagonale sans 0 sur la diagonale et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. C est non inversible car il y a une combinaison linéaire entre les colonnes : $C_3 = -C_1 - 2C_2$.

4. D est inversible car $ad - bc = 2 - (-4) = 6 \neq 0$.

- EXERCICE 6 -

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et on pose $N = T - I_3$.**

1. **La matrice T est-elle inversible?**

T est inversible car c'est une matrice triangulaire et sans 0 sur la diagonale.

Les deux arguments sont nécessaires!

2. **Calculer N^3 puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de T^n en fonction de I et de N .**

On trouve $N^3 = 0$ (et donc $N^k = 0$, $\forall k \geq 3$ par récurrence immédiate).

On a : $T = I_3 + N$ et comme les matrices I_3 et N commutent, on peut écrire (formule du binôme) pour tout $n \geq 2$:

$$T^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \text{ puisque les puissances de } N \text{ suivantes sont nulles.}$$

$$\text{Ainsi, on a, pour tout } n \geq 2 : T^n = \binom{n}{0} I_3^n + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

3. **Calculer $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$ puis en déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3 , N et N^2 .**

On obtient, avec $N^3 = 0$:

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3.$$

En remarquant que $I_3 + N = T$, soit $T(I_3 - N + N^2) = I_3$, on en déduit que T est inversible et que $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

- EXERCICE 7 -

Soit A, T et P trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation : $T = P^{-1}AP$.

Établir l'équivalence suivante pour toute matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

On commence par remarquer que : $T = P^{-1}AP \iff PTP^{-1} = A$.

On a alors en multipliant à droite par P puis à gauche par P^{-1} (la position des matrices compte) :

$$\begin{aligned} NA = AN &\iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \iff NPT\underbrace{P^{-1}P}_{=I} = PTP^{-1}NP \quad \text{on multiplie à droite par } P \\ &\iff NPT = PTP^{-1}NP \\ &\iff P^{-1}NPT = \underbrace{P^{-1}PT}_{=I}P^{-1}NP \quad \text{on multiplie à gauche par } P^{-1} \\ &\iff P^{-1}NPT = TP^{-1}NP \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \end{aligned}$$

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 8 -

Soit A une matrice inversible vérifiant : $3A^3 + 2A^2 - A = 0$.

Déterminer A^{-1} .

On multiplie par A^{-1} ce qui donne : $3A^2 + 2A - I = 0$ puis $A(3A + 2I) = I$ donc $A^{-1} = 3A + 2I$.

- EXERCICE 9 -

Soit A une matrice nilpotente, c'est-à-dire vérifiant : il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$.

Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.

Par l'absurde : Si A^{-1} existe, $A^p = 0$ donne $(A^{-1})^p A^p = 0$ soit $A^{-p} A^p = 0$ soit $A^0 = 0$ soit $I = 0$, ce qui est absurde donc A n'est pas inversible.

- EXERCICE 10 -

On dit que deux matrices carrées A et B commutent si et seulement si $AB = BA$.

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

On cherche $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $MD = DM$ soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

On obtient : $\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$ ce qui donne : $b = c = d = f = g = h = 0$ et a, e, i quelconques

donc finalement : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Ainsi, les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D sont les matrices diagonales.

- EXERCICE 11 -

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer J^2 en fonction de J , puis pour tout $n \geq 2$, J^n en fonction de J .

On obtient : $J^2 = 3J$ puis par récurrence immédiate $J^n = 3^{n-1}J$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de M^n en fonction de I et de J .

On trouve : $M^n = I + \frac{4^n - 1}{3}J$ à l'aide du binôme de Newton (calculs costauds).

- EXERCICE 12 -

Soit n un entier ($n \geq 2$) et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On pose $M = J - I_n$.

1. La matrice J est-elle inversible ?

J est non inversible car elle a des colonnes égales.

2. Exprimer J^2 en fonction de J et de n .

On trouve : $J^2 = nJ$. Essayer avec $n = 3$.

3. En déduire une expression de M^2 en fonction de M , I_n et n .

On a : $M^2 = (J - I)^2 = J^2 - 2J + I$ car I et J commutent.

soit : $M^2 = (n - 2)J + I = (n - 2)(M + I) + I = (n - 2)M + (n - 1)I$.

4. En déduire que la matrice M est inversible et donner son inverse.

On obtient avec la relation précédente :

$M(M - (n - 2)I) = (n - 1)I$ donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{n - 1}(M - (n - 2)I)$.

5. La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?

M et I sont inversibles mais $J = M + I$ ne l'est pas donc la réponse est non !

- EXERCICE 13 -

On rappelle que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$.

Soit A une matrice inversible.

Montrer que tA est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.

Puisqu'on nous donne le résultat, il suffit de vérifier. On vérifie donc :

$${}^tA {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$$

ce qui montre bien le résultat voulu.