

- EXERCICE 1 -

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par : $f(x) = e^x - e \ln(x)$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f' avec les limites de f' en 0 et en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
3. Dresser le tableau de variations de f avec les limites de f en 0 et en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

- EXERCICE 2 -

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ et $h(x) = (e^x + e^{-x})x - e^x + e^{-x}$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction g .
(b) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de g .
2. (a) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
(b) Calculer $h(0)$ puis en déduire le signe de h .
3. On pose : $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
(a) Montrer que f est paire.
(b) Donner le développement limité de e^x et de e^{-x} à l'ordre 1 au voisinage de 0.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
(d) Pour tout x non nul, exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.
(e) En déduire le tableau de variations de f , limites comprises.

- EXERCICE 3 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, et tracer une allure de sa courbe représentative.
3. (a) Factoriser la fonction polynômiale $P(X) = 1 + X^2 - 2X^3$ puis en déduire son signe.
(b) En déduire le signe de $f(x) - x$ en fonction des valeurs de x .
4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.
(b) En déduire la monotonie puis la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vers une limite ℓ que l'on précisera.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) Démontrer que f est continue en 0.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.
(b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe et les variations de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- EXERCICE 5 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0?
5. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

- EXERCICE 6 -

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.

$$2. \text{ On définit la fonction } f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ par : } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Étudier le signe de $f(x)$.
- (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- (d) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
- (e) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
- (f) Dresser le tableau de variation de f .

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x}) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

- EXERCICE 8 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
(b) Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 0^+ et 0^- . La fonction f est-elle continue en 0?
(c) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$. (On pourra poser $t = 1/x$).
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
(b) Dresser le tableau de variations de f .

- EXERCICE 9 -

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0; +\infty[$, par : $f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0; +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que C admet une tangente verticale en O.
5. Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
6. Déterminer l'équation de la tangente au point I puis tracer l'allure de C . On fera apparaître la tangente
7. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une seule solution et que celle-ci est égale à 1.