

- EXERCICE 1 -

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par : $f(x) = e^x - e \ln(x)$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f' avec les limites de f' en 0 et en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a clairement $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{e}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ par somme.

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ par somme.

Enfin, $f'(1) = 0$, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. Dresser le tableau de variations de f avec les limites de f en 0 et en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Comme f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 1, on en déduit que f' est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

De plus, on a :

- $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -e \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ par somme.
- Au voisinage de $+\infty$, $\ln(x) = o(e^x)$ donc $f(x) \sim e^x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

ce qui donne le tableau de variations suivant (avec $f(1) = e$) :

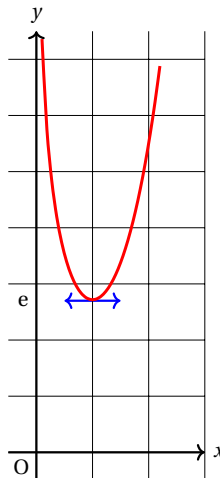
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Comme $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$, la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une tangente verticale d'équation $x = 0$.

Enfin, $f'(1) = 0$ donc la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en 1.

**- EXERCICE 2 -**

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = (e^x + e^{-x})x - e^x + e^{-x}$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x : $g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (b) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de g .

On a : $g(0) = 0$ donc d'après le tableau de variations de g , on a :

g est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit et on a pour tout réel x :

$$h'(x) = (e^x - e^{-x})x + (e^x + e^{-x}) - e^x - e^{-x} = (e^x - e^{-x})x = 2xg(x)$$

On a alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$			

Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (b) Calculer $h(0)$ puis en déduire le signe de h .

On a : $h(0) = 0$ donc d'après le tableau de variations de h , on a :

h est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

3. On pose : $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- (a) Montrer que f est paire.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$f(-x) = \frac{(e^{-x} - e^{-(-x)})}{2(-x)} = -\frac{(e^{-x} - e^x)}{2x} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2x} = f(x)$$

donc f est paire.

- (b) Donner le développement limité de e^x et de e^{-x} à l'ordre 1 au voisinage de 0.

On a, au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{et} \quad e^{-x} = 1 - x + o(x)$$

- (c) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Au voisinage de 0, on a : $e^x - e^{-x} = 1 + x + o(x) - (1 - x + o(x)) = 2x + o(x)$ ce qui donne au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{2x + o(x)}{2x} = 1 + o(1)$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

- (d) Pour tout x non nul, exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel x non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{g'(x)x - g(x)}{x^2} = \frac{(e^x + e^{-x})x - e^x + e^{-x}}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

(e) **En déduire le tableau de variations de f , limites comprises.**

On a alors d'après l'étude de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- En $+\infty$: $g(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée.
- En $-\infty$: $g(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{2}$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{2x}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ par CC.

- EXERCICE 3 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. **Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.**

On a : $1+x \underset{0}{\sim} 1$ donc $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ par quotient.

On a : $1+x \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2}$ par quotient.

2. **Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, limites comprises et tracer une allure de sa courbe représentative.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{2x - (1+x)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

Comme $4x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) \geq 0 \iff x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$, ce qui donne (avec $f(1) = 1$) :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

D'après la question précédente, on a :

- $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$.

3. (a) **Factoriser la fonction polynomiale $P(X) = 1 + X^2 - 2X^3$ puis en déduire son signe.**

On remarque que 1 est racine évidente, ce qui permet de factoriser par $(X-1)$.

On a alors :

$$P(X) = 1 + X^2 - 2X^3 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

puis en identifiant d'abord les coefficients de plus haut degré (on obtient directement $a = -2$) et plus bas degré (on obtient $c = 1$) :

$$P(X) = 1 + X^2 - 2X^3 = (X-1)(-2X^2 + bX + 1)$$

Enfin, comme $(X-1)(-2X^2 + bX + 1) = -2X^3 + (b+2)X^2 + \dots$, en identifiant le terme en X^2 , on obtient : $b+2 = 1$ soit $b = -1$ ce qui donne :

$$P(X) = (X-1)(-2X^2 - X + 1) = (1-X)(2X^2 + X + 1)$$

Le discriminant de $2X^2 + X + 1$ étant strictement négatif ($\Delta = -3$), ce polynôme est de signe constant strictement positif (car $a = 2 > 0$) donc $P(X)$ est du signe de $(1-X)$.

Finalement, $P(X) \geq 0 \iff 1-X \geq 0 \iff X \leq 1$.

(b) **En déduire le signe de $f(x) - x$ en fonction des valeurs de x .**

On a pour tout $x > 0$: $f(x) - x = \frac{1+x-2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui est du signe de $1+x-2x\sqrt{x}$.

Notons $X = \sqrt{x}$. On a alors : $1+x-2x\sqrt{x} = 1+X^2-2X^3 = P(X)$.

Ainsi, $f(x) - x \geq 0 \iff P(X) \geq 0 \iff X \leq 1 \iff \sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	$-$

4. **On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.**

(a) **Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.**

Par récurrence.

• Pour $n = 1$: comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et que f admet 1 comme minimum sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'étude précédente, on en déduit que $u_1 = f(u_0) \geq 1$.

• Soit $n \geq 1$. On a : $u_n \geq 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq 1$ toujours car f admet 1 comme minimum sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **En déduire la monotonie puis la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vers une limite ℓ que l'on précisera.**

On a vu en Q 3b que $f(x) - x \leq 0$ pour $x \geq 1$. Ainsi, pour $n \geq 1$, on a $u_n \geq 1$, on a : $f(u_n) - u_n \leq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir du rang 1.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 (car $u_n \geq 1$) donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie (par continuité de la fonction f) : $f(\ell) = \ell$.

Or, comme en Q 3b, on a :

$$f(x) - x = \frac{1+x-2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \iff 1+x-2x\sqrt{x} = 0 \iff P(X) = 0 \iff X = 1 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$$

Finalement, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) **Démontrer que f est continue en 0.**

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(x) = -\infty$ par produit donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = 0$ par composition.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

(b) **Étudier la dérivabilité de f en 0.**

On calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Or, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ par quotient $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ par composition.

Ainsi, f est dérivable en 0^+ et $f'(0) = 0$.

2. (a) **Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.**

• Méthode 1 : Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x - 1$ et en déduire qu'elle est négative en cherchant son maximum.

• Méthode 2 : Utiliser un argument de convexité de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ (faire un graphe).

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave donc sa courbe est en dessous de ses tangentes, en particulier sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$.

Ainsi, on a : $\ln(x) \leq x - 1$ et à fortiori $\ln(x) \leq x + 1$ (puisque $x - 1 \leq x + 1$).

(b) **Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe et les variations de f .**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \left(-\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1+\frac{1}{x}}{x}\right) e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = (-\ln(x) + x + 1) \frac{e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}}{x^2} \geq 0$$

car $-\ln(x) + x + 1 > 0$ d'après la question précédente et on a $x^2 > 0$ et $e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} > 0$.

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que $f(x) \sim x$ puis en déduire la limite de f en $+\infty$.

Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

On a, d'après le calcul déjà fait plus haut : $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par C.C donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ par composition.

Ainsi, $f(x) \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

- EXERCICE 5 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est impaire.

On vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -x \ln((-x)^2) + 2x = -(x \ln(x^2) - 2x) = -f(x)$ donc f est impaire.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Continuité sur $\mathbb{R}^*$:

Comme $x^2 > 0$, $x \mapsto \ln(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f également par produit et somme.

Continuité en 0 :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) - 2x = 0 = f(0)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ par C.C.

Comme f est impaire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.

Donc f continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée produit somme et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \ln(x^2) + x \frac{2x}{x^2} - 2 = \ln(x^2)$$

4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

On calcule le taux d'accroissement en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x^2) - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2) - 2 \xrightarrow{0} -\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

5. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

f impaire donc on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

On a, avec la dérivée de Q3

$$f'(x) = \ln(x^2) > 0 \iff x^2 > 1 \iff x > 1 \quad \text{car } x > 0$$

Ainsi, f est décroissante sur $]0; 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$.

D'autre part, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) = +\infty$ par produit.

Donc par imparité : f est décroissante sur $] -1; 0]$ puis croissante sur $] -\infty, -1]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

- EXERCICE 6 -

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.

• Méthode 1 : Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x - \ln(x)$ et en déduire qu'elle est positive en cherchant son minimum (à faire).

• Méthode 2 : Plus subtil : Utiliser un argument de convexité de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ (faire un graphe en faisant apparaître $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x - 1$).

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave donc sa courbe est en dessous de ses tangentes, en particulier sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$.

Ainsi, on a : $\ln(x) \leq x - 1$ et à fortiori $\ln(x) < x$ (puisque $x - 1 < x$).

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul ($x - \ln(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

• Continuité en 0 :

On a : $x - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ car $x \underset{0}{\sim} o(\ln(x))$ donc : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\ln(x)}{-\ln(x)} = -1$ par quotient.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Remarque : On aurait aussi pu factoriser par $\ln(x)$

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Étudier le signe de $f(x)$.

On a déjà vu que $x - \ln(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$ est du signe de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\forall x \in]0, 1], f(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) \geq 0$.

(c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On a : $x - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ car $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} o(x)$ donc : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$ par quotient.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par C.C.

(d) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

On calcule la limite du taux d'accroissement en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} - (-1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + x - \ln(x)}{x(x - \ln(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln(x)} = 0 \quad \text{par quotient}$$

Ainsi, f est dérivable (à droite) en 0 et $f'_d(0) = 0$.

(e) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul ($x - \ln(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$). Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$$

(f) Dresser le tableau de variation de f .

Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e \quad \text{par croissance de } x \mapsto e^x$$

Ainsi, on a :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x}) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

On résout : $e^x - e^{-x} > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.

f est dérivable comme composée et somme et on obtient après calculs : $f'(x) = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

3. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises.

Comme $e^x - e^{-x} > 0$ d'après les calculs de Q1, on a : $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour les limites, on factorise par e^x dans le $\ln$ ce qui donne :

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(1 - e^{-2x}) - x = \ln(1 - e^{-2x})$$

On trouve alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ par composition et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par composition.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0

4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

La fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

- EXERCICE 8 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

f continue comme composée et produit de fonctions continues ($x \neq 0$ donc $x \mapsto 1/x$ continue).

(b) Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 0^+ et 0^- . La fonction f est-elle continue en 0?

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1$ par composition donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

• De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par produit.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$ par composition puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ par produit.

• De même, $\lim_{x \rightarrow 0^-} -1/x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = +\infty$ par composition puis $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ par produit.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, la fonction f n'est pas continue en 0.

(c) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$. (On pourra poser $t = 1/x$).

On calcule la limite du taux d'accroissement en posant $t = 1/x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} e^{-1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t+1)e^{-t} = 0 \quad \text{par CC}$$

d'où le résultat.

2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

f est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables ($x \neq 0$ donc $x \mapsto 1/x$ dérivable).

On trouve, après calculs : $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-1/x}$.

(b) Dresser le tableau de variations de f .

Comme $e^{-1/x} > 0$ et $x^2 > 0$, le signe de f' est donné par le signe du numérateur $x^2 + x + 1$.

Or, le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut -3 donc $x^2 + x + 1 > 0$ (discriminant négatif donc pas de racines donc trinôme du signe de $a = 1$).

Ainsi, $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et f est strictement croissante. On a alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- EXERCICE 9 -

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0; +\infty[$, par : $f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et différence de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) = 0$ par croissance comparée et donc on obtient par somme de limites :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 - t \ln(t) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0 et ainsi, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

La fonction f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ comme produit et différence de fonctions de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, on a :

$$f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \quad \text{et} \quad f''(t) = 2 - \frac{1}{t}.$$

3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.

Déterminons le signe de f'' ce qui nous donnera les variations de f' puis son signe. On a :

$$f''(t) \geq 0 \iff 2 - \frac{1}{t} \geq 0 \iff t \geq \frac{1}{2}$$

On obtient donc, en remarquant que :

• $f'(1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2) > 0$

• $f(t) = t^2 - t \ln(t) = t^2 \left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ par produit car $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparées.

t	0	1/2	$+\infty$
$f''(t)$		-	+
$f'(t)$			
$f(t)$			

4. Montrer que C admet une tangente verticale en O .

Étudions la limite du taux d'accroissement en 0^+ . On a :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = t - \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 mais la courbe C admet une (demi-)tangente verticale (d'équation $x = 0$).

5. Montrer que C admet un seul point d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente en ce point.

La fonction f étant de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, C admet un point d'inflexion en a ssi f'' s'annule et change de signe en a .

Or, d'après le tableau de variations, $f''(t)$ s'annule et change de signe si, et seulement si, $t = \frac{1}{2}$.

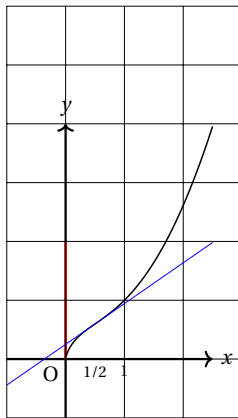
De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

Ainsi, C admet un unique point d'inflexion I de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

6. Déterminer l'équation de la tangente au point I puis tracer l'allure de C . On fera apparaître la tangente

La tangente au point d'inflexion a pour équation $y = \ln(2) \left(t - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)t + \frac{1}{4}$.

On obtient :



7. **Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.**

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ (d'après les calculs précédents) .

De plus, $1 \in [0, +\infty[$ donc l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.

Comme $f(1) = 1$, cette unique solution est 1.

Finalement, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ qui est 1.