

- EXERCICE 1 -

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

- $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 1, -2)$.
- $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
- $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$
- $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- EXERCICE 2 -

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que les vecteurs X_1 , X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.
 - La matrice A est-elle diagonalisable?
- Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3 .
 - Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.
 - La matrice B est-elle diagonalisable?
- Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
 - Vérifier que $C^4 = I$ puis en déduire les valeurs propres possibles de C .
 - La matrice C est-elle diagonalisable?

- EXERCICE 3 -

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- Préciser sans calculs si ces matrices sont diagonalisables.
- Ces matrices sont-elles inversibles?

- EXERCICE 4 -

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

Si oui, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- EXERCICE 5 -

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible.
- Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
- En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.
- Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ .
- Déterminer, à l'aide de P et de Δ , une matrice R telle que $R^2 = A$.

- EXERCICE 6 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^k est aussi diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- EXERCICE 7 -

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- Calculer $A^2 - 7A$.
- En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.
- Trouver alors toutes les valeurs propres de A , et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.
- La matrice A est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?

2. On considère à présent la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur de $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Déterminer le noyau de B .
- Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.
- Calculer BU .
- Déduire des questions précédentes que la matrice B est diagonalisable.

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

• La matrice $D_2 = P^{-1} B P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

- Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
- La matrice $D_1 = P^{-1} A P$ est également diagonale.

- EXERCICE 8 -

Pour tout a réel, on considère la matrice : $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_0$.

- Calculer $J^3 + J^2$. En déduire les valeurs propres possibles de J .
- En déduire que J est diagonalisable puis déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont rangés par ordre croissant et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.
- En déduire que pour tout réel a , la matrice M_a est diagonalisable, puis déterminer une matrice diagonale $D_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $M_a = PD_aP^{-1}$.
- Préciser alors le spectre de M_a . Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible?

- EXERCICE 9 -

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante : $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer $4A^3 - 3A$ puis en déduire un polynôme P annulateur de A .
- Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis déterminer toutes les racines de P .
- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P , de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P D P^{-1}$.
- Calculer P^{-1} puis déterminer explicitement la matrice A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soient u_0 , v_0 , w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par : $X_n = A X_{n-1}$.

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.
- En déduire que $u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.