

- EXERCICE 1 -**Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.**

- 1.
- $\mathcal{B}$
- est la base canonique de
- $\mathbb{R}^3$
- et
- $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- avec
- $\vec{u} = (1, 1, 1)$
- ,
- $\vec{v} = (1, -1, 0)$
- et
- $\vec{w} = (1, 1, -2)$
- .

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\vec{u} = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \quad \vec{v} = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3 \quad \vec{w} = 1e_1 + 1e_2 - 2e_3$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 2.
- $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
- et
- $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$
- .

On a :

$$\begin{aligned} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3.
- $\mathcal{B}$
- est la base canonique de
- $\mathbb{R}_2[X]$
- et
- $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$
- .

Soit (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$-X^2 + 2X + 1 = 1P_0 + 2P_1 - P_2 \quad X + 1 = 1P_0 + 1P_1 + 0P_2 \quad X^2 + 2 = 2P_0 + 0P_1 + 1P_2$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4.
- $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$
- et
- $\mathcal{B}'$
- est la base canonique de
- $\mathbb{R}_2[X]$
- .

On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 2$ et $Q_2 = X^2 - 3X + 3$ et (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- $P_0 = 1Q_0 + 0Q_1 + 0Q_2$.
- $P_1 = 2Q_0 + 1Q_1 + 0Q_2$
- On cherche a, b et c tels que

$$P_2 = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 \Leftrightarrow X^2 = a - 2b + 3c + (b - 3c)X + cX^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a - 2b + 3c \\ 0 = b - 3c \\ 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P_2 = 3Q_0 + 3Q_1 + 1Q_2$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- EXERCICE 2 -

1. Soit la matrice
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
- et les matrices colonnes
- $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ,
- $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- et
- $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- .

- (a)
- Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.**

- On a : $X_1 \neq 0$ et $AX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0X_1$. Donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

- On a : $X_2 \neq 0$ et $AX_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$. Donc X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

- On a : $X_3 \neq 0$ et $AX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_3$. Donc X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

- (b)
- La matrice A est-elle diagonalisable?**

D'après la question précédente, les réels 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de A . Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle a au plus 3 valeurs propres donc $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$.Notons U, V et W trois vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 0, 1 et 2.La famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est libre car composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Comme elle contient 3 vecteurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . Donc A est diagonalisable.

2. Soit la matrice
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- .

- (a)
- Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3 .**

Le réel 3 est valeur propre de B ssi la matrice $B - 3I_3$ est non inversible ssi $\text{Ker}(B - 3I_3) \neq \{0\}$.Déterminons $\text{Ker}(B - 3I_3)$.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}). \text{ Alors}$$

$$X \in \text{Ker}(B - 3I_3) \Leftrightarrow (B - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y = z$$

On a donc $\text{Ker}(B - 3I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$. On peut donc en conclure que 3 est valeur propre de B .De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E_3 et c'est une famille libre (un seul vecteur non nul), donc c'est une base de E_3 .

- (b)
- Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.**

La matrice B est non inversible car ses trois colonnes sont égales.Donc $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre de B .On obtient après calculs : $\text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $E_0 = \text{Ker}(B)$.

- (c)
- La matrice B est-elle diagonalisable?**

On a obtenu :

$$\bullet \text{Ker}(B - 3I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(U)$$

$$\bullet \text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(V, W)$$

La famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est libre par concaténation de deux familles libres de deux sous-espace propres différents.Comme $\mathcal{B}'$ contient 3 vecteurs propres de B et que $\dim(M_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que B est diagonalisable.Remarque : On aurait également pu remarquer que B est symétrique donc diagonalisable.

3. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

- (a) **Vérifier que $C^4 = I$ puis en déduire les valeurs propres possibles de C .**

On calcule C^2 puis on vérifie facilement que $C^4 = I$. On en déduit alors que $C^4 - I = 0$ et donc que le polynôme $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de C .

D'après le cours, les valeurs propres possibles de C sont des racines de P . Or, on a :

$$P(X) = 0 \iff X^4 - 1 = 0 \iff (X^2 - 1)(X^2 + 1) = 0 \iff (X^2 - 1) = 0 \iff X = -1 \text{ ou } X = 1$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de C sont -1 et 1 : $Sp(C) \subset \{-1, 1\}$. (J'ai bien mis $\subset$ et pas $=$).

- (b) **La matrice C est-elle diagonalisable?**

Il s'agit de déterminer la dimension des sous-espaces propres. On obtient

- $\text{Ker}(C + I) = \{0\}$ donc -1 n'est pas une valeur propre de C .

- $\text{Ker}(C - I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc 1 est une valeur propre de C et $E_1(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(U)$ est de dimension 1.

Ainsi, on a : $Sp(C) = \{1\}$ et l'espace propre associé est $E_1(C) = \text{Vect}(U)$ qui est de dimension 1.

Raisonnons par l'absurde : si C était diagonalisable, il existerait une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de C donc une famille libre constituée de 3 de vecteurs de $E_1(C)$. Ce qui est absurde puisque $\dim(E_1(C)) = 1$. Donc C n'est pas diagonalisable.

Remarque : On peut aussi raisonner par l'absurde comme dans l'exemple du cours : si C était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice D diagonale (avec les valeurs propres sur la diagonale) telle que :

$$B = PDP^{-1}.$$

Dans notre cas, la seule valeur propre est 1 donc $D = I$ et on aurait donc :

$$B = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Or $C \neq I$ donc C n'est pas diagonalisable.

- EXERCICE 3 -

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Préciser sans calculs si ces matrices sont diagonalisables.

- Les valeurs propres de A se lisent sur sa diagonale car A est une matrice triangulaire.

Donc $Sp(A) = \{1, 0, 3\}$.

Notons U , V et W trois vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 0, 1 et 3.

La famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est libre car composée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Comme elle contient 3 vecteurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . Donc A est diagonalisable.

- Les valeurs propres de B se lisent sur sa diagonale car B est une matrice triangulaire. Donc $Sp(B) = \{2\}$. Par l'absurde : si B était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice D diagonale (avec les valeurs propres sur la diagonale) telle que :

$$B = PDP^{-1}.$$

Dans notre cas, la seule valeur propre est 2 donc $D = 2I$ et on aurait donc :

$$B = P2IP^{-1} = 2PP^{-1} = 2I.$$

Or $B \neq 2I$ donc B n'est pas diagonalisable.

- C est une matrice symétrique donc C est diagonalisable.

2. Ces matrices sont-elles inversibles?

- Comme A est une matrice triangulaire avec un 0 sur la diagonale, A n'est pas inversible.

- Comme B est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale, B est inversible.
- L'application du pivot de Gauss permet de montrer que C est inversible après obtention d'une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale. Inutile de chercher C^{-1} .

- EXERCICE 4 -

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

Si oui, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Je détaille les calculs seulement pour la matrice A . Je me contente de donner les résultats pour les autres.

1. Recherche des valeurs propres :

λ est valeur propre de A

$$\iff A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible}$$

$$\iff (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 \times 1 = 0$$

$$\iff -\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

$$\iff \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 3.$$

Ainsi : $Sp(A) = \{-2, 3\}$.

• Recherche des sous-espaces propres :

- ★ $E_{-2} = \text{Ker}(A + 2I_2)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X \in \text{Ker}(A + 2I_2) \iff (A + 2I_2)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

$$\text{Ainsi, } E_{-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E_{-2} et c'est une famille libre (un vecteur non nul).

Donc c'est une base de E_{-2} .

- ★ $E_3 = \text{Ker}(A - 3I_2)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X \in \text{Ker}(A - 3I_2) \iff (A - 3I_2)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = 4y$$

$$\text{Ainsi, } E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E_3 et c'est une famille libre (un vecteur non nul). Donc c'est une base de E_3 .

• Diagonalisation

D'après les calculs précédents, on déduit que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre comme concaténation

de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de VP de A .

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la b.c à la base $\mathcal{C}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale contenant les vp de A (dans le même ordre que les VP).

On a d'après la formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$.

2. • **Recherche des valeurs propres :**

La matrice B est triangulaire donc on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale. Ainsi, les valeurs propres sont de B sont 1, 2 et 3 : $Sp(B) = \{1, 2, 3\}$.

• **Recherche des sous-espaces propres :**

On obtient : $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• **Diagonalisation**

D'après les calculs précédents, on déduit que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre comme concaténation de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ la famille $\mathcal{C}$ donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de VP de B .

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la b.c à la base $\mathcal{C}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale contenant les vp de B (dans le même ordre que les VP). On a d'après la formule de changement de base : $B = PDP^{-1}$.

3. • **Recherche des valeurs propres :**

On effectue le pivot de Gauss sur la matrice $C - \lambda I$ (attention aux opérations interdites) et on trouve : $Sp(C) = \{1, 3\}$.

• **Recherche des sous-espaces propres :**

On obtient : $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

• **Diagonalisation**

D'après les calculs précédents, on déduit que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre comme concaténation de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ la famille $\mathcal{C}$ donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de VP de C .

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la b.c à la base $\mathcal{C}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale contenant les vp de C (dans le même ordre que les VP). On a d'après la formule de changement de base : $C = PDP^{-1}$.

4. • **Recherche des valeurs propres :**

La matrice D est triangulaire donc on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale. Ainsi, les valeurs propres sont de D sont 1 et 2 : $Sp(D) = \{1, 2\}$.

Remarque : Ici, il n'y a que deux vp distinctes et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas conclure et il faut déterminer les sous-espaces propres pour savoir si D est diagonalisable ou non.

• **Recherche des sous-espaces propres :**

On obtient : $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

• **Diagonalisation**

Les bases des sous-espaces propres trouvés ne permettent pas de construire une famille libre de vecteurs propres (seulement deux vecteurs libres pour un espace $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3). Ainsi, il n'existe pas de base de vecteurs propres donc D n'est pas diagonalisable.

- EXERCICE 5 -

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible.**

La matrice A est symétrique donc elle est diagonalisable.

La matrice A a deux colonnes égales ($C_1 = C_2$) donc elle n'est pas inversible.

2. **Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.**

On commence par vérifier que 0, 1 et 4 sont des valeurs propres de A en calculant $\text{Ker}(A)$, $\text{Ker}(A - I)$ et $\text{Ker}(A - 4I)$.

On obtient après calculs :

• $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $0 \in Sp(A)$.

• $\text{Ker}(A - I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $1 \in Sp(A)$.

• $\text{Ker}(A - 4I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $4 \in Sp(A)$.

Ainsi, 0, 1 et 4 sont des v.p de A et comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet au plus 3 v.p distinctes. On en déduit que $Sp(A) = \{0, 1, 4\}$ et on a obtenu les SEP associés précédemment.

3. **En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.**

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois v.p distinctes, elle est diagonalisable.

Remarques importantes :

• Comme la matrice D est imposée ($0 < 1 < 4$), on ne peut pas choisir la base de diagonalisation n'importe comment.

Il faut que l'ordre de vecteurs propres dans la base de diagonalisation corresponde à l'ordre des v.p associée (le VP associé à 0 en premier, puis celui associé à 1 et enfin celui associé à 4).

• Comme une ligne de la matrice P est imposée, il faut faire attention au choix des VP. Précisons.

En fonction de vos calculs, vous pouvez trouver à la question précédente des résultats justes mais qui ne donneront pas la bonne forme pour la matrice P .

par exemple, mon espace propre $E_0 = \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donnera un -1 sur la première ligne de P

ce qui est contraire à ce qui est demandé. On s'en sort en modifiant ce SEP par combinaisons linéaires (c'est une opération autorisée dans les Vect) pour obtenir la ligne voulue. Par exemple ici : $E_0(A) =$

$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ce qui donnera la bonne matrice P .

Retour au corrigé : D'après les calculs précédents, on déduit que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre

comme concaténation de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ la famille $\mathcal{C}$ donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de VP de A . Donc A est diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la b.c à la base $\mathcal{C}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la

matrice diagonale contenant les vp de B (dans le même ordre que les VP).

On a d'après la formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$.

4. **Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ .**

D est diagonale avec des coefficients positifs sur la diagonale. On peut prendre la racine carrée de ces éléments.

$$\text{Posons } \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien : $\Delta^2 = D$.

5. **Déterminer, à l'aide de P et de Δ , une matrice R telle que $R^2 = A$.**

Posons $R = P\Delta P^{-1}$. On a alors :

$$R^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

- EXERCICE 6 -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^k est aussi diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

On a alors (par récurrence immédiate) : $A^k = PD^k P^{-1}$, avec D^k diagonale.

Ainsi, A^k est diagonalisable (puisque D^k est diagonale et P inversible).

- EXERCICE 7 -

1. **Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) **Calculer $A^2 - 7A$.**

On obtient : $A^2 - 7A = -12I_3$

(b) **En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.**

Comme $A^2 - 7A = -12I_3$, on a : $A^2 - 7A + 12I_3 = 0$ donc le polynôme $P(X) = X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de A . Après calcul, on obtient que les racines de P sont 3 et 4.

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont 3 et 4 : $Sp(A) \subset \{3, 4\}$.

(c) **Trouver alors toutes les valeurs propres de A , et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.**

Il faut à présent vérifier si 3 et 4 sont effectivement des valeurs propres de A . On obtient :

• $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $3 \in Sp(A)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ étant libre (2 vecteurs non colinéaires), c'est une base de $E_3(A)$.

• $E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $4 \in Sp(A)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ étant libre (1 vecteur non nul), c'est une base de $E_4(A)$.

(d) **La matrice A est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?**

Comme $0 \notin Sp(A)$, la matrice A est inversible.

D'après les calculs précédents, on déduit que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre comme conca-

ténation de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ la famille $\mathcal{C}$ donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de VP de A . Donc A est diagonalisable.

2. **On considère à présent la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur de $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.**

(a) **Déterminer le noyau de B .**

On obtient $\text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

(b) **Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.**

On a : $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc en notant (C_1, C_2, C_3) les colonnes de $B - 2I$, on a :

$\text{rg}(B - 2I_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$ car $C_3 = C_1$ et (C_1, C_2) est libre.

Ainsi, $\text{rg}(B - 2I_3) = 2$.

(c) **Calculer BU .**

On a : $BU = B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $BU = 3U$.

(d) **Déduire des questions précédentes que la matrice B est diagonalisable.**

• On a vu que $\text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre de B .

• Comme $\text{rg}(B - 2I_3) = 2$, on en déduit par le théorème du rang (à rédiger) que $\dim(\text{Ker}(B - 2I_3)) = 3 - 2 = 1$ donc $\text{Ker}(B - 2I_3) \neq \{0\}$ ce qui montre que 2 est valeur propre de B .

• Comme $BU = 3U$ et que $U \neq 0$, on en déduit que 3 est valeur propre de B .

Ainsi, B est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ qui admet 3 valeurs propres distinctes. Comme B admet au plus 3 valeurs propres, on les a toutes et donc $Sp(B) = \{0, 2, 3\}$ et B est diagonalisable.

3. **Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :**

• **La matrice $D_2 = P^{-1} B P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,**

• **Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),**

• **La matrice $D_1 = P^{-1} A P$ est également diagonale.**

• La condition $D_2 = P^{-1} B P$ qui équivaut à $B = P^{-1} D_2 P$ signifie qu'il faut diagonaliser B .

Remarquons que comme $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, les espaces propres associés sont de dimension 1.

On a déjà obtenu :

★ $E_0 = \text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et un vecteur propre pour la valeur propre 3 : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

★ Reste à déterminer l'espace propre E_2 . On obtient après calculs : $E_2 = \text{Ker}(B - 2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour obtenir la matrice D_2 demandée, il faut bien ordonner les vecteurs propres de la nouvelle base. On

considère donc la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est libre (par concaténation de familles libres de

SEP) et constitue donc une base de vecteurs propres.

En prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (inversible) de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, on

obtient d'après la formule de changement de base : $B = P^{-1} D_2 P$.

• La dernière condition demandée signifie que A est diagonalisable **avec la même matrice de passage P** donc que les vecteurs propres de B sont aussi des vecteurs propres de A .

Or, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A (d'après la question 1) et d'autre part,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est également un vecteur propre de A car $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui permet de répondre à la question

et on peut même donner D_1 qui contient les valeurs propres de A : $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 8 -

Pour tout a réel, on considère la matrice : $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_0$.

1. Calculer $J^3 + J^2$. En déduire les valeurs propres possibles de J .

On obtient : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ puis $J^3 + J^2 = 2J$.

On en déduit que $J^3 + J^2 - 2J = 0$ et donc que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de J .

On a alors : $P(X) = 0 \iff X^3 + X^2 - 2X = 0 \iff X = 0$ ou $X^2 + X - 2 = 0 \iff X = 0$ ou $X = -2$ ou $X = 1$.

Ainsi, les valeurs propres possibles de J sont $\{-2, 0, 1\}$ (les racines de P) : $Sp(J) \subset \{-2, 0, 1\}$.

2. En déduire que J est diagonalisable puis déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont rangés par ordre croissant et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

Il s'agit de vérifier si ces valeurs sont vraiment des valeurs propres pour obtenir le spectre de J .

On ne détaille pas les calculs. On obtient :

• Pour $\lambda = -2$: $E_{-2}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $-2 \in Sp(J)$.

• Pour $\lambda = 0$: $E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $0 \in Sp(J)$.

• Pour $\lambda = 1$: $E_1(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ donc $1 \in Sp(J)$.

Ainsi, $Sp(J) = \{-2, 0, 1\}$.

• D'après les calculs précédents, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre comme concaténation de familles libres de SEP distincts. Comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J . Ainsi, J est diagonalisable.

• Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres de J (dans l'ordre croissant d'où le choix de l'ordre des vecteurs propres dans P).

• On a alors d'après la formule de changement de base : $J = PDP^{-1}$.

3. En déduire que pour tout réel a , la matrice M_a est diagonalisable, puis déterminer une matrice diagonale $D_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $M_a = PD_aP^{-1}$.

On remarque que : $M_a = aI + J$. On a donc, en utilisant la formule $J = PDP^{-1}$:

$$\begin{aligned} M_a &= aI + J \\ &= aI + PDP^{-1} \\ &= aPP^{-1} + PDP^{-1} \\ &= P(aI + D)P^{-1} \end{aligned}$$

En posant :

$$D_a = aI + D = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice diagonale D_a telle que : $M_a = PD_aP^{-1}$, ce qui montre que la matrice M_a est diagonalisable.

4. Préciser alors le spectre de M_a . Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

- D'après la question précédente, $M_a = PD_aP^{-1}$ ce qui montre que la matrice M_a est diagonalisable et que : $Sp(M_a) = \{a, a+1, a-2\}$ (valeurs de la diagonale de D_a).
- D'autre part, M_a est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre de M_a .
On en déduit que M_a est inversible ssi $a \neq 0$ et $a+1 \neq 0$ et $a-2 \neq 0$.
Ainsi, M_a est inversible ssi $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2\}$.

- EXERCICE 9 -

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante : $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $4A^3 - 3A$ puis en déduire un polynôme P annulateur de A .

On obtient : $4A^3 = 4 \cdot \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} = I + 3A$ donc $4A^3 - 3A = I$ soit $4A^3 - 3A - I = 0$.

Le polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - 1$ est un polynôme annulateur de A .

2. Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis déterminer toutes les racines de P .

On a $P(1) = 0$ donc on peut factoriser P par $(X - 1)$.

Ainsi, $P(X) = 4X^3 - 3X - 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$, ce qui donne après développement et identification des coefficients : $P(X) = (X - 1)(4X^2 + 4X + 1)$.

Enfin, on reconnaît une identité remarquable ce qui permet d'obtenir : $P(X) = (X - 1)(2X + 1)^2$.

Les racines de P sont donc $x_0 = 1$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$.

3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P , de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P D P^{-1}$.

Comme P est un polynôme annulateur de A , on en déduit que les valeurs propres possibles de A sont les racines de P : $Sp(A) \subset \{-1/2, 1\}$.

On vérifie si elles sont valeurs propres en déterminant les SEP. On obtient :

• $E_{-1/2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ la famille étant une base car libre (2 vecteurs non colinéaires).

• $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la famille étant une base car libre (1 vecteur non nul).

On construit la famille suivante pour obtenir la bonne matrice de passage (inversible) P .

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (par concaténation de famille libre de SEP différents). Comme elle

contient 3 vecteurs et que $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, c'est une base formée de VP de A .

Donc A est diagonalisable et on a d'après la formule de changement de base : $A = P D P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

4. Calculer P^{-1} puis déterminer explicitement la matrice A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On obtient par application du pivot de Gauss simultané sur P et I : $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Par récurrence immédiate, on a : $A^n = P D^n P^{-1}$, ce qui donne après calculs :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

5. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par : $X_n = AX_{n-1}$.

(a) **Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.**

Par récurrence :

• $n = 0$: $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$: Supposons $X_n = A^n X_0$. On a : $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

ce qui conclut la récurrence.

(b) **En déduire que $u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.**

On a donc :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne pour u_n (première ligne) :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3} \left[u_0 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u_0 + v_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 + w_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n w_0 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[u_0 + v_0 + w_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(2u_0 - \underbrace{(v_0 + w_0)}_{=1-u_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3u_0 - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\text{soit } u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $-1 < -1/2 < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}$