

- EXERCICE 1 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ate^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

1. Rappeler l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2.
2. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f .
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - (b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

- EXERCICE 2 -

Soient $U \mapsto \mathcal{U}([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la variable aléatoire : $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.

1. Déterminer la loi de V . Donner son espérance et sa variance.
2. On pose $Z = \frac{1}{V}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .

- EXERCICE 3 -

On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par : $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{e^x - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité notée X puis donner une densité de X .
2. On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $V = \ln(1 + U^2)$ et on note F_V la fonction de répartition de V .
 - (a) Justifier que $V(\Omega) = [0, \ln(2)]$ puis donner $F_V(t)$ pour $t < 0$ et pour $t > \ln(2)$.
 - (b) Montrer que V suit la même loi que X .
 - (c) Écrire une fonction Python d'entête `"def Simu_X() :"` qui permet de simuler la variable X .

- EXERCICE 4 -

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On note F_X sa fonction de répartition. Soit Y est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose $Z = XY$. On admet que Z est une variable aléatoire et on note F_Z sa fonction de répartition.

1. En utilisant le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

2. Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour tout réel x puis montrer, à l'aide de la question 1, que la fonction de répartition F_Z de la variable Z est définie par : $F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
3. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité. *On dit que Z suit une loi de Laplace de paramètre λ .*
4. Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par : $f_Z(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$.
5. Justifier sans calcul que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$.
6. Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.
7. On rappelle que la commande `"rd.exponential(1/alpha)"` permet de simuler une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\alpha)$ (attention, le paramètre est $1/\alpha$).
Écrire une fonction Python d'entête `"def Simu_Z(alpha) :"` qui permet de simuler la loi de Laplace de paramètre α .

- EXERCICE 5 -

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 et on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité admettant f_n pour densité.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n admet une espérance.
4. Déterminer $E(T_1)$ et $E(T_2)$.
5. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x)$.
(b) Montrer ensuite, à l'aide d'une IPP : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$.
(c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

- EXERCICE 6 -

Trois personnes, notées A , B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que les durées de passage au guichet des trois personnes A , B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X , Y et Z et suivant toutes la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On pose : $U = \min(X, Y)$ et on note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

1. Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par : $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
2. En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité de U .
3. Déterminer l'espérance de U .
4. Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes puis en déduire $E(T)$.

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f .
2. Montrer, sans calculs, que X admet une espérance et déterminer sa valeur.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On note f_{X_1} et f_{X_2} leurs densités respectives.

On considère la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$.

On admet alors que Z est une variable à densité et qu'une densité de Z est donnée par la fonction f_Z définie par la relation suivante, notée $(\star)$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{X_2}(x-t)dt \quad (\star)$

3. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{X_2}(x-t)dt$.
4. Le but de cette question est de montrer que $Z = X_1 + X_2$ suit la même loi que X .
 - (a) Soit $x < 0$. Justifier que $f_Z(x) = 0$.
 - (b) Soit $x \geq 0$. En utilisant les expressions de $f_{X_1}(t)$ et de $f_{X_2}(x-t)$ suivant les valeurs de t , montrer que : $f_Z(x) = xe^{-x}$.
 - (c) Conclure que $Z = X_1 + X_2$ suit la même loi que X .
5. Déduire du résultat de la question précédente la valeur de $E(X)$ et celle de $V(X)$.