

- EXERCICE 1 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ate^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

1. Rappeler l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2.

Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$, alors $E(T) = \frac{1}{2}$.

2. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

- f est positive ssi $a \geq 0$.
- f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- On cherche a tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = 1$.

Or d'après la question précédente, si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$, alors $E(T) = \frac{1}{2}$.

Or, $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{+\infty} 2te^{-2t} dt = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = \frac{1}{4}$.

On a donc : $a \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = 1 \iff a = 4$.

3. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f .**(a) Déterminer la fonction de répartition de X .**

On commence par remarquer que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour $x < 0$, on a : $F_X(x) = 0$.

Pour $x > 0$, on a : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 4te^{-2t} dt$.

On effectue une IPP et on trouve :

$$\int_0^x 4te^{-2t} dt = \dots = -2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 = 1 - (2x + 1)e^{-2x}$$

$$\text{Ainsi : } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (2x + 1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

La variable aléatoire X admet une espérance

ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument

ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-2t} dt$ converge (car l'intégrande est nul sur $[-\infty, 0[$ et positif sur $[0, +\infty[$).

On reconnaît le moment d'ordre 2 d'une loi exponentielle : si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$, alors $\int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-2t} dt = E(T^2)$.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-2t} dt &= 2 \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-2t} dt \\ &= 2E(T^2) \\ &= 2(V(T) + E(T)^2) \\ &= 2\left(\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $E(X)$ existe et $E(X) = \int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-2t} dt = 1$.

- EXERCICE 2 -

Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la variable aléatoire : $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.

1. Déterminer la loi de V . Donner son espérance et sa variance.

Comme $U(\Omega) =]0, 1[$, on a $0 < 1 - U < 1$ donc $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) > 0$. Ainsi, V est bien défini et $V(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Déterminons la fonction de répartition de V . On a :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, $F_V(t) = 0$ car $V(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(t) &= P(V \leq t) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq t\right) \\ &= P(\ln(1 - U) \geq -\lambda t) \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= P(1 - U \geq e^{-\lambda t}) \quad \text{car exp croissante} \\ &= P(U \leq 1 - e^{-\lambda t}) \\ &= F_U(1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

Mais pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a (avec $\lambda > 0$) : $t \geq 0 \implies -\lambda t \leq 0 \implies 0 < e^{-\lambda t} \leq 1 \implies 1 - e^{-\lambda t} \in]0, 1[$.

Or, si $x \in]0, 1[$, $F_U(x) = x$ car $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

On a donc : $F_V(t) = F_U(1 - e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Ainsi, $F_V(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ donc $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $E(V) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(V) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. On pose $Z = \frac{1}{V}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .

Comme $V > 0$, on a $Z = \frac{1}{V} > 0$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Déterminons la fonction de répartition de V . On a :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, $F_Z(t) = 0$ car $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P\left(\frac{1}{V} \leq t\right) \\ &= P\left(V \geq \frac{1}{t}\right) \quad \text{car } t \mapsto 1/t \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= 1 - P\left(V < \frac{1}{t}\right) \\ &= 1 - P\left(V \leq \frac{1}{t}\right) \quad \text{car } V \text{ est une v.a à densité} \\ &= 1 - F_V\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right) \quad \text{car } V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \text{et } \frac{1}{t} > 0 \\ &= e^{-\frac{\lambda}{t}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } F_Z(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (composée sur $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur $\mathbb{R}^*$).

Elle est donc également continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus elle est continue en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\lambda}{t} = -\infty$ donc par composition $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\lambda}{t}} = 0 = F_Z(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0$. Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Z est une variable aléatoire à densité et une densité de Z est donnée par $f_Z(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

en dérivant F_Z sur $\mathbb{R}^*$ et en choisissant $f_Z(0) = 0$.

- EXERCICE 3 -

On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par : $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{e^x - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$.

1. **Montrer que la fonction G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité notée X puis donner une densité de X .**

- La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\}$ (comme composée sur $]0, \ln(2)[$ et comme constante ailleurs).
- La fonction G est de donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\}$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^x - 1} = 0 = G(0)$ et $\lim_{x \rightarrow \ln(2)} 1 = \lim_{x \rightarrow \ln(2)} \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{e^{\ln(2)} - 1} = \sqrt{1} = 1 = G(\ln(2))$.
Ainsi, G est continue en 0 et en $\ln(2)$ donc sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.
- Pour tout $x \in]0, \ln(2)[$, on a : $G'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0$ donc la fonction G est croissante sur $]0, \ln(2)[$ et constante ailleurs donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut donc en déduire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée X .

Une densité de X est donnée par : $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} & \text{si } 0 < x < \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en choisissant $g(0) = g(\ln(2)) = 0$.

2. **On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.**

On pose $V = \ln(1 + U^2)$ et on note F_V la fonction de répartition de V .

- (a) **Justifier que $V(\Omega) = [0, \ln(2)]$ puis donner $F_V(t)$ pour $t < 0$ et pour $t > \ln(2)$.**
 $U(\Omega) = [0, 1]$. On a donc par croissance de la fonction carrée et de la fonction $\ln$:
 $0 \leq U \leq 1 \iff 1 \leq 1 + U^2 \leq 2 \iff \ln(1) \leq \ln(1 + U^2) \leq \ln(2) \iff 0 \leq V \leq \ln(2)$.
Ainsi, $V(\Omega) = [0, \ln(2)]$. On en déduit que : $F_V(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_V(t) = 1$ si $t > \ln(2)$.
- (b) **Montrer que V suit la même loi que X .**
Soit $t \in]0, \ln(2)[$. On a :

$$\begin{aligned} F_V(t) &= P(V \leq t) = P(\ln(1 + U^2) \leq t) \\ &= P(1 + U^2 \leq e^t) \quad \text{par croissance de la fonction exp} \\ &= P(U^2 \leq e^t - 1) \\ &= P(U \leq \sqrt{e^t - 1}) \quad \text{par croissance de la fonction racine sur } \mathbb{R}_+ \\ &= F_U(\sqrt{e^t - 1}) \end{aligned}$$

Or, $0 < t < \ln(2) \iff 0 < e^t - 1 < 1 \iff 0 < \sqrt{e^t - 1} < 1$.
Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on a : $F_V(t) = F_U(\sqrt{e^t - 1}) = \sqrt{e^t - 1}$.

Ainsi, on a : $F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{e^t - 1} & \text{si } 0 \leq t \leq \ln(2) = G(t) \text{ donc } V \text{ suit la même loi que } X. \\ 1 & \text{si } t > \ln(2) \end{cases}$

- (c) **Écrire une fonction Python d'entête "def Simu_X() :" qui permet de simuler la variable X .**
Comme X et V suivent la même loi, on va simuler V .

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def Simu_X() :
5     U = rd.rand()
6     V = np.log(1+U**2)
7     return (V)
```

- EXERCICE 4 -

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On note F_X sa fonction de répartition. Soit Y est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose $Z = XY$. On admet que Z est une variable aléatoire et on note F_Z sa fonction de répartition.

1. **En utilisant le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, montrer que :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

D'après la FPT avec le SCE $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(XY \leq x) = P([XY \leq x \cap [Y = 1]]) + P([XY \leq x] \cap [Y = -1]) \\ &= P([X \leq x] \cap [Y = 1]) + P([-X \leq x] \cap [Y = -1]) \\ &= P(X \leq x)P(Y = 1) + P(-X \leq x)P(Y = -1) \quad \text{par indépendance de } X, Y \\ &= \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x) \\ &= \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}(1 - P(X < -x)) \\ &= \frac{1}{2}F_X(x) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-x)) \\ F_Z(x) &= \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1) \end{aligned}$$

A la troisième ligne, on a utilisé l'indépendance de $-X$ et de Y qui découle de celle de X et de Y (lemme des coalitions).

A l'avant dernière ligne, on a utilisé le fait que X est une variable à densité ce qui permet d'écrire que : $P(X < -x) = P(X \leq -x) = F_X(-x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1)$.

2. **Rappeler l'expression de $F_X(x)$ pour tout réel x puis montrer, à l'aide de la question 1, que la fonction de**

répartition F_Z de la variable Z est définie par : $F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } -x \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(0 - (1 - e^{\lambda x}) + 1) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda x} - 0 + 1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

soit

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. **En déduire que Z est une variable aléatoire à densité. On dit que Z suit une loi de Laplace de paramètre λ .**

La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

En particulier, F_Z est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Z(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Z(x) = F_Z(0)$ donc F_Z est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Ces deux points permettent de conclure que Z est une variable aléatoire à densité.

4. **Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :** $f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.
- On obtient une densité f_Z de Z en dérivant F_Z sur $\mathbb{R}^*$ et en choisissant une valeur pour $f_Z(0)$. On obtient alors pour $x \neq 0$:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda \frac{1}{2} e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

car $-|x| = x$ si $x < 0$.

En choisissant $f_Z(0) = \frac{\lambda}{2}$, on obtient la densité donnée par l'énoncé, à savoir :

pour tout réel x : $f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.

5. **Justifier sans calcul que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$.**
- On reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ qui vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ converge et : $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

6. **Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.**
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|-x| = |x|$ donc :

$$f_Z(-x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|-x|} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = f_Z(x)$$

donc f_Z est une fonction paire.

$E(Z)$ existe ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_Z(x)| dx$ converge

Or, $x \mapsto |x f_Z(x)|$ est paire car $|-x f_Z(-x)| = |-x f_Z(x)| = |x f_Z(x)|$.

Ainsi, $E(Z)$ existe ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} |x f_Z(x)| dx$ converge car $x \mapsto |x f_Z(x)|$ est paire

ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} x dx$ converge car $x f_Z(x) = \lambda x e^{-\lambda x} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or, d'après la question précédente, cette dernière intégrale converge, donc $E(Z)$ existe.

De plus, comme $x \mapsto x f_Z(x)$ est impaire, on a : $\int_{-\infty}^0 x f_Z(x) dx = - \int_0^{+\infty} x f_Z(x) dx$, et donc d'après la relation de Chasles : $E(Z) = 0$.

7. **On rappelle que la commande "rd.exponential(1/alpha)" permet de simuler une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\alpha)$ (attention, le paramètre est $1/\alpha$).**

Écrire une fonction Python d'entête "def Simu_Z(alpha) :" qui permet de simuler la loi de Laplace de paramètre alpha.

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def Simu_Z(alpha) :
5     if rand() < 1/2 :
6         Y = -1
7     else :
8         Y = 1
9     X = rd.exponential(1/alpha)
10    Z = X*Y
11    return (Z)

```

- EXERCICE 5 -

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 et on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. **Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.**

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $X_i \leq \max(X_1, \dots, X_n)$.

Ainsi, si $\max(X_1, \dots, X_n) \leq x$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $X_i \leq x$ donc $[(X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)]$.

Réciproquement, si $[(X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)]$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $X_i \leq x$, et donc $\max(X_1, \dots, X_n) \leq x$.

On a donc :

$$[\max(X_1, \dots, X_n) \leq x] = [(X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)]$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$P(T_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$= P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x))$$

$$= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i$$

Or, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes une loi exponentielle de paramètre 1, donc $P(X_1 \leq x) = \dots = P(X_n \leq x) = 1 - e^{-x}$ ce qui donne : $P(T_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n$.

2. **En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité admettant f_n pour densité.**

Comme $T_n(\Omega) =]0; +\infty[$, on a : $P(T_n \leq x) = 0$ pour tout $x \leq 0$.

Ainsi, on a d'après la question précédente :

$$F_n(x) = P(T_n \leq x) = \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (par composition et produit sur $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur $\mathbb{R}_-^*$).

Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_n(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = F_n(0)$. Ainsi, F_n est continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que T_n est une variable aléatoire à densité.

De plus, pour tout $x > 0$, on a $F'_n(x) = n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} = f_n(x)$.

Pour tout $x < 0$, $F'_n(x) = 0 = f_n(x)$.

La valeur d'une densité en un point (ici 0) étant arbitraire, on en déduit que f_n est bien une densité de T_n .

3. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n admet une espérance.**

La variable aléatoire T_n admet une espérance

ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx$ converge absolument

ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} n x e^{-x} (1 - e^{-x})^n dx$ converge (intégrande positif).

Or, pour tout $x > 0$, on a : $n x e^{-x} (1 - e^{-x})^n \sim n x e^{-x}$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^n = 1$).

De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} n x e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ est convergente (espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1).

Comme les fonctions considérées sont positives, on en déduit par le TCIFP que l'intégrale $\int_0^{+\infty} n x e^{-x} (1 - e^{-x})^n dx$ est convergente et ainsi la variable aléatoire T_n admet une espérance.

4. **Déterminer $E(T_1)$ et $E(T_2)$.**

On a (espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1) : $E(T_1) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$.

On a :

$$E(T_2) = \int_0^{+\infty} 2 x e^{-x} (1 - e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} (2 x e^{-x} - 2 x e^{-2x}) dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} x (2 e^{-2x}) dx = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

car $\int_0^{+\infty} x (2 e^{-2x}) dx$ est l'espérance d'une variable de loi exponentielle de paramètre 2 qui vaut $\frac{1}{2}$.

5. (a) **Vérifier** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

(b) **Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

(c) **En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.**

- EXERCICE 6 -

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z et suivant toutes la loi uniforme sur $[0; 1[$.

On pose : $U = \min(X, Y)$ et on admet que U est une variable aléatoire.

On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

1. **Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par** :
$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = [0; 1]$, on a : $U(\Omega) = [0; 1]$.

Donc, pour tout $x < 0$, on a $F_U(x) = 0$ et, pour tout $x > 1$, on a $F_U(x) = 1$.

De plus, comme $X > \min(X, Y)$ et $Y > \min(X, Y)$, on a :

$$[\min(X, Y) > x] = [(X > x) \cap (Y > x)]$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = 1 - P(U > x) = 1 - P(\min(X, Y) > x) \\ &= 1 - P((X > x) \cap (Y > x)) \\ &= 1 - P(X > x)P(Y > x) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= 1 - (1 - P(X \leq x))(1 - P(Y \leq x)) \\ &= 1 - (1 - x)(1 - x) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent une loi uniforme sur } [0; 1[\\ &= 1 - (1 - 2x + x^2) = 2x - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi :
$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. **En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité de U .**

F_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Donc F_U est également continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. La continuité en 0 et en 1 est évidente donc F_U est continue sur $\mathbb{R}$ donc U est une variable aléatoire à densité.

Une densité f_U de U est obtenue en dérivant F_U sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et en choisissant $f_U(0) = f_U(1) = 0$

$$f_U(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. **Déterminer l'espérance de U .**

La variable aléatoire U admet une espérance

ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_U(x) dx$ converge absolument

ssi l'intégrale $\int_0^1 x(2 - 2x) dx$ converge (intégrande positif), ce qui est le cas puisque cette intégrale n'est pas impropre (intégrande continue sur $[0, 1]$).

On a alors :
$$E(U) = \int_0^1 x f_U(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. **Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes puis en déduire $E(T)$.**

Le temps passé par C est la somme du temps passé par le premier des deux autres clients et de son temps de passage, soit : $T = \min(X, Y) + Z = U + Z$.

On a alors, par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. **Montrer que f est une densité de probabilité.**

On note X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f .

• f est positive sur $\mathbb{R}$.

• f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ CV si et seulement si $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ CV car f est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Or, on reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $E(T) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ d'après la relation de Chasles.

donc f est une densité de probabilité.

2. **Montrer, sans calculs, que X admet une espérance et déterminer sa valeur.**

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} x f(x) dx \text{ converge} \quad \text{car } g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_- \\ &\iff \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = E(T^2)$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc cette intégrale converge. On a alors :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = 1 + 1^2 = 2$$

La variable aléatoire X admet une espérance et $E(X) = 2$.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On note f_{X_1} et f_{X_2} leurs densités respectives.

On considère la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$.

On admet alors que Z est une variable à densité et qu'une densité de Z est donnée par la fonction f_Z définie

par la relation suivante, notée $(\star)$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt \quad (\star)$$

3. **Justifier que** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt$.

Comme X_1 suit une loi exponentielle, sa densité f_{X_1} est nulle sur $\mathbb{R}_-$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt}_{=0} + \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt \end{aligned}$$

4. **Le but de cette question est de montrer que $Z = X_1 + X_2$ suit la même loi que X .**

(a) **Soit $x < 0$. Justifier que $f_Z(x) = 0$.**

• Méthode 1 :

Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a : $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ donc $f_Z(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

- Méthode 2 :

On a : si $x < 0$, alors $(x - t) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ donc $f_{X_2}(x - t) = 0$ d'après la formule de la densité

de la loi exponentielle donc $f_Z(x) = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) \underbrace{f_{X_2}(x - t)}_{=0} dt = 0$.

- (b) **Soit $x \geq 0$. En utilisant les expressions de $f_{X_1}(t)$ et de $f_{X_2}(x - t)$ suivant les valeurs de t , montrer que :**

$$f_Z(x) = xe^{-x}.$$

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R}_+, f_{X_1}(t) = e^{-t}.$$

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R}_+, f_{X_2}(x - t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x - t < 0 \\ e^{-(x-t)} & \text{si } x - t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t > x \\ e^{-x+t} & \text{si } t \leq x \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x - t) dt \\ &= \int_0^x e^{-t} e^{-x+t} dt + \int_x^{+\infty} e^{-t} 0 dt \\ &= \int_0^x e^{-x} dt \\ &= e^{-x} \int_0^x 1 dt \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_Z(x) = xe^{-x}$

- (c) **Conclure que $Z = X_1 + X_2$ suit la même loi que X .**

On remarque alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_Z(x) = f(x)$.

Donc Z et X ont même densité de probabilité donc elles suivent la même loi.

5. **Déduire du résultat de la question précédente la valeur de $E(X)$ et celle de $V(X)$.**

Comme Z suit la même loi que X , on a en particulier : $E(Z) = E(X)$ et $V(Z) = V(X)$ ce qui donne

- $E(X) = E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 1 + 1 = 2$ par linéarité de l'espérance.
- $V(X) = V(Z) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 1 + 1 = 2$ par indépendance de X_1 et X_2 .

Ainsi, $E(X) = 2$ et $V(X) = 2$.