

- **EXERCICE 1** -
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, et Φ sa fonction de répartition.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que : $P(X \leq -x) = P(X \geq x)$.
2. Retrouver alors une formule du cours reliant $\Phi(-x)$ et $\Phi(x)$.
3. Calculer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite :
 $P(X \leq 1,94)$; $P(X > 1,27)$; $P(-0,14 \leq X \leq 1,65)$; $P(-2 \leq X \leq -1,34)$; $P(|X| \leq 1)$.
4. Déterminer un réel $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) = 0,95$.

- **EXERCICE 2** -
Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X , exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On admet que le retard moyen est de 5 minutes.

1. Donner la valeur de m puis rappeler la loi suivie par la variable $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$.
2. On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$. On donne également $\Phi(1) \approx 0.8413$.
En déduire que $\sigma = 2$.
3. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 3 minutes?
4. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes?

- **EXERCICE 3** -
Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite.

1. On note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n .
2. On note $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_n .
3. Répondre aux question précédentes en supposant que les X_i suivent toute la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

- **EXERCICE 4** -
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

2. En déduire que Y suit la même loi que X .
3. Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
4. (a) Donner la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$.
(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- (c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$.
- (d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.
5. (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.
(b) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

- **EXERCICE 5** -
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X et φ une densité de X .
On définit la variable aléatoire $Y = |X|$ et on note F_Y sa fonction de répartition et f_Y une densité.

1. Rappeler l'expression de $\varphi(x)$ pour tout x réel puis donner la valeur de $E(X)$, $V(X)$ et $E(X^2)$.
2. Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.

3. En déduire que Y est une variable à densité et montrer que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

4. Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
5. Justifier que $Y^2 = X^2$ puis en déduire sans calculs que Y admet une variance et donner sa valeur.

- **EXERCICE 6** -
Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est une densité.
Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f
2. (a) Vérifier que la fonction g , qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.
(b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a .
(c) En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
3. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et le déterminer.

- **EXERCICE 7** -
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X et φ une densité de X . On considère la variable aléatoire définie par $Y = e^X$ et on note F_Y la fonction de répartition et f_Y une densité de Y .

1. Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de Φ .
2. En déduire que Y est une variable à densité et montrer que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
3. Soit $\lambda > 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x - \frac{(\ln(x))^2}{2} - \ln(x)$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_Y(x) e^{\lambda x} = +\infty$.

- **EXERCICE 8** -
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$: $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que : $I_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right)$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis déterminer la limite de I_n .

Pour aller plus loin...

- **EXERCICE 9** -
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$.
3. En déduire la variance de Y sans calcul supplémentaire.