

- EXERCICE 1 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, et Φ sa fonction de répartition.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que : $P(X \leq -x) = P(X \geq x)$.

On a, en notant φ la densité (qui est paire) de la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} P(X \leq -x) &= \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-x} \varphi(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} - \int_{-A}^x \varphi(-u) du \quad \text{chgt var } u = -t \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_x^{-A} \varphi(u) du \quad \text{par parité de } \varphi \\ &= \int_x^{+\infty} \varphi(u) du \\ &= P(X \geq x) \end{aligned}$$

2. Retrouver alors une formule du cours reliant $\Phi(-x)$ et $\Phi(x)$.

On a alors :

$$\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

car $P(X < x) = P(X \leq x)$ puisque X est une variable à densité.

3. Calculer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite :

$$P(X \leq 1,94); \quad P(X > 1,27); \quad P(-0,14 \leq X \leq 1,65); \quad P(-2 \leq X \leq -1,34); \quad P(|X| \leq 1).$$

On a en utilisant la table de la loi normale centrée réduite :

- $P(X \leq 1,94) = \Phi(1,94) \approx 0,9738$
- $P(X > 1,27) = 1 - P(X \leq 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \approx 1 - 0,8980 = 0,102$
- $P(-0,14 \leq X \leq 1,65) = \Phi(1,65) - \Phi(-0,14) = \Phi(1,65) - (1 - \Phi(0,14)) \approx 0,9505 - 1 + 0,5557 = 0,5062$
- Par parité : $P(-2 \leq X \leq -1,34) = P(1,34 \leq X \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(1,34) \approx 0,9772 - 0,9099 = 0,0673$
- $P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$

4. Déterminer un réel $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) = 0,95$.

On a :

$$\begin{aligned} P(-x \leq X \leq x) &= 0,95 \iff \Phi(x) - \Phi(-x) = 0,95 \\ &\iff \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 0,95 \\ &\iff 2\Phi(x) - 1 = 0,95 \\ &\iff \Phi(x) = 0,975 \\ &\iff x \approx 1,96 \quad \text{d'après la table de la loi } \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

- EXERCICE 2 -

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X , exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On admet que le retard moyen est de 5 minutes.

1. Donner la valeur de m puis rappeler la loi suivie par la variable $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, m correspond à l'espérance de X , soit $m = 5$ d'après l'énoncé.

D'autre part, comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

2. On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$. On donne également $\Phi(1) \approx 0.8413$.

En déduire que $\sigma = 2$.

D'après l'énoncé, on a : $P(X \leq 7) = 0.8413$. pour utiliser la table de la loi normale centrée réduite, on va

utiliser X^* . Or, on a :

$$P(X \leq 7) = P(X - 5 \leq 2) = P\left(\frac{X-5}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}\right) = P\left(X^* \leq \frac{2}{\sigma}\right)$$

donc :

$$P(X \leq 7) = 0.8413 \iff P\left(X^* \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0.8413 \iff \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8413$$

Or, on a d'après l'énoncé : $\Phi(1) \approx 0.8413$ ce qui donne

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = \Phi(1) \iff \frac{2}{\sigma} = 1 \quad \text{car } \Phi \text{ est bijective } (\varphi > 0 \text{ sur } \mathbb{R}).$$

Ainsi, $\sigma = 2$.

3. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 3 minutes ?

On a donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$, ce qui donne :

$$P(X \geq 3) = P\left(\frac{X-5}{2} \geq -1\right) = P(X^* \geq -1) = 1 - P(X^* \leq -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0.8413$$

car $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

4. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ?

Il s'agit de calculer : $P_{X \geq 3}(X \leq 7)$. On a :

$$P_{X \geq 3}(X \leq 7) = \frac{P(X \geq 3 \cap X \leq 7)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(3 \leq X \leq 7)}{P(X \geq 3)}$$

$$\text{Or, on a : } P(3 \leq X \leq 7) = P\left(-1 \leq \frac{X-5}{2} \leq 1\right) = P(-1 \leq X^* \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826.$$

$$\text{On a vu à la question précédente que : } P(X \geq 3) \approx 0.8413, \text{ ce qui donne : } P_{X \geq 3}(X \leq 7) \approx \frac{0.6826}{0.8413} \approx 0.8113.$$

- EXERCICE 3 -

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite.

1. On note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n .

Les variables étant indépendantes, on sait d'après le cours que par stabilité des lois normales, S_n suit également une loi normale, dont les paramètres (qui sont $E(S_n)$ et $V(S_n)$) restent à déterminer. Or, on a :

$$\bullet E(S_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

Mais chaque X_i suivant une loi normale centrée réduite, on a : $E(X_i) = 0$, ce qui donne : $E(S_n) = 0$.

$$\bullet V(S_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ par indépendance des variables aléatoires.}$$

Mais chaque X_i suivant une loi normale centrée réduite, on a : $V(X_i) = 1$, ce qui donne :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}.$$

Finalement, $S_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1/n)$.

2. On note $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_n .

Le même raisonnement que précédemment aboutit à : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

3. Répondre aux question précédentes en supposant que les X_i suivent toute la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Le même raisonnement que précédemment en supposant que les X_i suivent toute la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (donc $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = \sigma^2$) aboutit à :

- $S_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$.
- $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\sqrt{n}.m, \sigma^2)$.

- EXERCICE 4 -

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

Comme U suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, $(U = -1)$; $(U = 1)$ forme un SCE.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P([U = 1] \cap [Y \leq x]) + P([U = -1] \cap [Y \leq x]) \\ &= P([U = 1] \cap [UX \leq x]) + P([U = -1] \cap [UX \leq x]) \\ &= P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [-X \leq x]) \\ &= P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x]) \end{aligned}$$

Finalement, $P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x])$.

2. En déduire que Y suit la même loi que X .

Comme U suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, on a : $P([U = -1]) = P([U = 1]) = \frac{1}{2}$.

Les variables U et X étant indépendantes, la relation de la question précédente donne :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(U = 1) P(X \leq x) + P(U = -1) P(X \geq -x) \\ &= \frac{1}{2} P(X \leq x) + \frac{1}{2} P(X \geq -x) \end{aligned}$$

Or, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a :

- $P(X \leq x) = \Phi(x)$
- $P(X \geq -x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$ par parité de la densité de X .
On peut aussi obtenir cette relation en utilisant la formule $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ de la manière suivante :
 $P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$

On a donc :

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{1}{2} \Phi(x) = \Phi(x) = P(X \leq x)$$

Donc Y suit la même loi que X .

3. Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$. Par définition, on a :

$$E(U) = -1P(U = -1) + 1P(U = 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

D'autre part, comme les variables U et X sont indépendantes, on a :

$$E(XY) = E(XUX) = E(UX^2) = E(U)E(X^2) = 0$$

Ainsi, $E(U) = 0$ et $E(XY) = 0$.

4. (a) Donner la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

ce qui donne, sachant que $V(X) = 1$ et $E(X) = 0$ (loi normale centrée réduite) : $E(X^2) = 1$.

Ainsi, par définition, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

ce qui donne, par parité de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$\text{soit } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

L'idée est d'écrire : $x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On choisit alors : $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$, $v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, on a par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^A - \int_0^A -3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$.

On a :

- $\lim_{A \rightarrow +\infty} -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$ par croissances comparées.
- $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$ d'après la question 4a.

Donc, par somme, on a :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$.

(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

Comme la fonction $x \mapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge également et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} = 3 \sqrt{2\pi}$$

On en déduit (d'après le théorème de transfert que X admet un moment d'ordre 4 et que :

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 3 \sqrt{2\pi} = 3$$

Ainsi, $E(X^4) = 3$.

5. (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.

On a $X^2 Y^2 = X^2 U^2 X^2 = X^4 U^2 = X^4$ car $U^2 = 1$ ($U^2(\Omega) = \{1\}$). Ainsi :

$$E(X^2 Y^2) = E(X^4) = 3$$

(b) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

Si X^2 et Y^2 étaient indépendantes, on aurait :

$$E(X^2 Y^2) = E(X^2) E(Y^2) = 1$$

car X et Y suivent la même loi normale centrée réduite.

Or, $E(X^2 Y^2) = 3 \neq 1$ donc X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

- EXERCICE 5 -

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X et φ une densité de X .

On définit la variable aléatoire $Y = |X|$ et on note F_Y sa fonction de répartition et f_Y une densité.

1. **Rappeler l'expression de $\varphi(x)$ pour tout x réel puis donner la valeur de $E(X)$, $V(X)$ et $E(X^2)$.**

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

De plus, $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ et par conséquent $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$.

2. **Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) \\ &= P(-x \leq X \leq x) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) \\ &= 2\Phi(x) - 1 \end{aligned}$$

3. **En déduire que Y est une variable à densité et montrer qu'une densité f_Y de Y est donnée par :**

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

$Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a : $F_Y(x) = 0$. Ainsi,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (car constante sur $\mathbb{R}_-$ et car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

En particulier, F_Y est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\Phi(0) = 1/2$ (car φ est paire) donc $\lim_{x \rightarrow 0+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$ donc F_Y est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Y est une variable à densité et une densité f_Y de Y est obtenue en dérivant F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et en choisissant $f_Y(0) = 2\varphi(0)$ (imposé par l'énoncé), ce qui donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

4. **Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.**

Y admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \, dx$ converge absolument ssi $\int_0^{+\infty} 2x\varphi(x) \, dx$ converge ssi $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} \, dx$ converge.

Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A x e^{-x^2/2} \, dx = \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

Donc $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} \, dx = 1$ et Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

5. **Justifier que $Y^2 = X^2$ puis en déduire sans calculs que Y admet une variance et donner sa valeur.**

On a : $Y^2 = |X|^2 = X^2$.

On en déduit que : $E(Y^2) = E(X^2) = 1$ d'après la première question. Ainsi, Y admet un moment d'ordre 2 donc une variance et on a :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

- EXERCICE 6 -

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. **Montrer que la fonction f est une densité.**

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit et composée sur $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur $\mathbb{R}_-^*$).
- f est positive sur $\mathbb{R}$.

- $\int_{-\infty}^0 f(t) \, dt = 0$.

Comme $x \mapsto \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A f(t) \, dt = \int_0^A \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} \, dt = \left[-e^{-t^2/2a} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2a} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{car } a > 0$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = 1$.

Donc f est une densité de probabilité.

2. (a) **Vérifier que la fonction g , qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2a} = x^2 e^{-x^2/2a} = g(x)$$

Ainsi, la fonction g est paire.

(b) **Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a .**

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$.

On a donc : $E(Z) = 0$ et $V(Z) = a$ et on en déduit que : $E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = a$.

D'autre part : $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-t^2/2a} \, dt$

(c) **En déduire que X admet une espérance et la déterminer.**

X admet une espérance

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \, dt$ converge absolument

ssi $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a} e^{-t^2/2a} \, dt$ converge (intégrande nul sur $\mathbb{R}_-$ et positif ailleurs).

Or d'après la question précédente, on a :

$$E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} \, dt = a$$

soit par parité de g :

$$2 \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} \, dt = a$$

ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a} e^{-t^2/2a} \, dt = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}$$

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}$

3. **Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et le déterminer.**

X admet un moment d'ordre 2

si et seulement si $E(X^2)$ existe

si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx$ CVA

si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a} e^{-x^2/2a} \, dx$ CV (car f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}_+$).

Soit $B > 0$. Calculons $\int_0^B \frac{x^3}{a} e^{-x^2/2a} \, dx = \int_0^B x^2 \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} \, dx$ par IPP à l'aide des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

suivantes :

$$u(x) = x^2 \quad (u'(x) = 2x) \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x^2/2a} \quad \left(v'(x) = \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} \right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B x^2 \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} \, dx &= \left[-x^2 e^{-x^2/2a} \right]_0^B + \int_0^B 2x e^{-x^2/2a} \, dx \\ &= -B^2 e^{-B^2/2a} + \left[-2a e^{-x^2/2a} \right]_0^B \\ &= -B^2 e^{-B^2/2a} - 2a e^{-B^2/2a} + 2a \\ &\xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 2a \quad \text{par C.C} \end{aligned}$$

Ainsi, $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = 2a$.

- EXERCICE 7 -

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X et φ une densité de X . On considère la variable aléatoire définie par $Y = e^X$ et on note F_Y la fonction de répartition et f_Y une densité de Y .

1. Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de Φ .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) \\ &= P(X \leq \ln(x)) \quad \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \Phi(\ln(x)) \end{aligned}$$

2. En déduire que Y est une variable à densité et montrer que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a : $F_Y(x) = 0$. Ainsi,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (car constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

En particulier, F_Y est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0_+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \Phi(\ln(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0_-} F_Y(x) = F_Y(0)$ donc F_Y est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Y est une variable à densité et une densité f_Y de Y est obtenue en dérivant F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et en choisissant $f_Y(0) = 0$ (imposé par l'énoncé), ce qui donne (dérivée d'une composée sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \varphi(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

3. Soit $\lambda > 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x - \frac{(\ln(x))^2}{2} - \ln(x)$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_Y(x) e^{\lambda x} = +\infty$.

On a : $\lambda x - \frac{(\ln(x))^2}{2} - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \lambda x$ car au voisinage de $+\infty$ $\ln(x)^2 = o(x)$ et $\ln(x)^2 = o(x)$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x - \frac{(\ln(x))^2}{2} - \ln(x) = +\infty.$$

On remarque alors que :

$$f_Y(x) e^{\lambda x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} e^{\lambda x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x) - \frac{(\ln(x))^2}{2} + \lambda x} \quad \text{car } \frac{1}{x} = e^{-\ln(x)}$$

et donc par composition, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_Y(x) e^{\lambda x} = +\infty$

- EXERCICE 8 -

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$: $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 g_n(x) \, dx$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

La fonction g_n est continue sur $[0, 1]$ (fermé) donc l'intégrale I_n est bien définie.

2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que : $I_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right)$.

On pose $u = \sqrt{n}x$, changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors : $du = \sqrt{n} \, dx$ donc $dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \, du$ et $x \in [0, 1] \implies u \in [0, \sqrt{n}]$, ce qui donne :

$$I_n = \int_0^1 e^{-(nx^2)/2} \, dx = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} \, du$$

Pour faire apparaître la loi normale centrée réduite, il faut introduire la densité $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \, du \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \varphi(u) \, du \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} [\Phi(u)]_0^{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis déterminer la limite de I_n .

La fonction Φ étant une fonction de répartition, elle vérifie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\Phi(\sqrt{n}) \leq 1$ et on en déduit que :

$$I_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

D'autre part, comme g_n est positive sur $[0, 1]$, on a par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens) : $I_n \geq 0$.

Ainsi, $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$, on a, par application du théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 9 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, Y est bien définie et $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

• Pour $x < 0$, on a : $P(Y \leq x) = 0$ car $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

• Pour $x \geq 0$, on a :

$$P(Y \leq x) = P\left(\sqrt{X} \leq x\right) = P\left(X \leq x^2\right) = F_X(x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}$$

Ainsi, on a : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$

2. **Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$.**

Commençons par justifier que Y est une variable à densité.

F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$ (continue en 0) donc Y est une variable à densité et une densité

est donnée par : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en dérivant F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et en choisissant $f_Y(0) = 0$.

$E(Y)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \, \mathrm{d}x$ CVA ssi $\int_0^{+\infty} 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2} \, \mathrm{d}x$ CV.

Dans le but de faire apparaitre la loi normale, on effectue le chgt de var : $t = \sqrt{2\lambda}x$ (donc $x = \frac{t}{\sqrt{2\lambda}}$ et

$\mathrm{d}t = \sqrt{2\lambda} \, \mathrm{d}x$), ce qui donne avec $A > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2} \, \mathrm{d}x &= 2\lambda \int_0^{\sqrt{2\lambda}A} \frac{t^2}{2\lambda} e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\sqrt{2\lambda}A} t^2 e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\sqrt{2\lambda}A} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{la convergence découle de ce qui suit} \end{aligned}$$

Or, par parité, on a : $\int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} E(N^2)$ avec $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Comme $E(N^2) = V(N) + E(N)^2 = 1$, on a bien : $E(Y)$ existe et $E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$.

3. **En déduire la variance de Y sans calcul supplémentaire.**

Comme $Y = \sqrt{X}$, on a : $E(Y^2) = E(X)$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi, $V(Y)$ existe et : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\lambda}$.