

- EXERCICE 1 -

On lance simultanément deux dés à trois faces (numérotées de 1 à 3) et on note  $X$  le maximum des numéros obtenus et  $Y$  le minimum des numéros obtenus.

- Écrire une fonction "SimuXY () " qui simule cette expérience et qui renvoie les valeurs de  $X$  et  $Y$ .
- Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .  
*On pourra introduire les variables alatoires  $D_1$  et  $D_2$  donnant les résultats du premier et du deuxième dé.*
- Déterminer les lois marginales.
- Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- Déterminer la loi de la variable  $Z = Y - X$  ainsi que son espérance.
- Déterminer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .

- EXERCICE 2 -

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(X, Y)$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ , de loi conjointe :  $P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$ .

- Déterminer le réel  $a$ .
- Déterminer les lois marginales.
- Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- EXERCICE 3 -

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est  $p \in ]0; 1[$  et de  $(n + 1)$  urnes numérotées de 0 à  $n$ .

Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , l'urne numérotée  $k$  contient  $k$  boules vertes et  $(n - k)$  boules rouges.

On considère l'expérience  $\mathcal{E}$  suivante : on lance  $n$  fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où pile a été obtenu.

Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces  $n$  lancers, on pioche dans l'urne 4.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus lors des  $n$  lancers et  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

- Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $X$ . En déduire la valeur de  $E(X)$  et  $E(X^2)$ .
- Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .
- Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience et renvoie les valeurs de  $X$  et  $Y$ , les valeurs de  $n$  et  $p$  étant données en paramètres.

*On rappelle que la commande "rd.binomial( $n, p$ )" renvoie une réalisation de  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .*

```
1 def simuXY3(n,p) :
2     X = rd.binomial( .... , .... )
3     Y = rd.binomial( .... , .... )
4     return (X,Y)
```

- (a) Calculer  $P_{(X=0)}(Y = 0)$  et  $P_{(X=n)}(Y = 0)$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?  
(b) Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}$  puis en déduire que :  $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$ .  
(c) Donner la loi de  $Y$  et son espérance.
- (a) Montrer que :  $E(XY) = \sum_{k=1}^n k P(X = k \cap Y = 1)$  puis en déduire que :  $E(XY) = \frac{E(X^2)}{n}$ .  
(b) En déduire la covariance du couple  $(X, Y)$ .

- EXERCICE 4 -

- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on appelle espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  l'espérance de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .

On note alors  $E_{[X=k]}(Y)$  cette espérance conditionnelle, donnée par :  $E_{[X=k]}(Y) = \sum_{i=1}^n i P_{[X=k]}(Y = i)$ .

Montrer que :  $E(Y) = \sum_{k=1}^n E_{[X=k]}(Y) P(X = k)$ .

- On dispose de  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$ . La boîte  $k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit  $X$  le numéro de la boîte et  $Y$  le numéro de la boule.  
(a) Déterminer la loi de  $X$ .  
(b) Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .  
(c) En déduire l'espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .  
(d) Déduire de la question 1 l'espérance de  $Y$ .
- Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
- Déterminer la loi de  $Y$  sous forme d'une somme (qu'on ne cherchera pas à calculer).

- EXERCICE 5 -

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité  $p$ . On dit que la première série est de longueur  $n \geq 1$  si les  $n$  premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le  $(n + 1)$ -ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats *FFPPPPPPFFFP*... alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.

Soient  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

- On suppose écrite une fonction "lancer(p) qui renvoie 1 pour Pile et 0 pour Face.  
Compléter alors la fonction suivante qui simule cette expérience et qui renvoie les valeurs de  $X_1$  et  $X_2$ , lorsque  $p$  est donné en paramètre.

```
1 def simuX1X2(p) :
2     Res1 = lancer(p)
3     X1 = ....
4     while lancer(p) == .... :
5         X1 = ....
6     X2 = ....
7     while lancer(p) != .... : # != signifie différent
8         X2 = ....
9     return (X1,X2)
```

- Déterminer la loi de  $X_1$ .
- On note  $q = 1 - p$ . Montrer que  $X_1$  admet une espérance et que  $E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ .
- Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ .
- En déduire la loi de  $X_2$ .
- Montrer que  $X_2$  admet une espérance et que  $E(X_2) = 2$ .
- Montrer que  $E(X_1 X_2)$  existe et que  $E(X_1 X_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ .
- On suppose que  $p = 1/2$ . Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.
- On suppose que  $p \neq 1/2$ . Vérifier que  $\text{cov}(X_1, X_2) = 4 - \frac{1}{pq}$  puis en déduire que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

- EXERCICE 6 -

- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On dit que les deux variables  $X$  et  $Y$  sont échangeables si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = j] \cap [Y = i])$$

- On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes et de même loi.  
Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables.
- On suppose que  $X$  et  $Y$  sont échangeables.  
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :  $\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i)$ .

2. Soient  $n, b$  et  $c$  trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches. On effectue l'expérience suivante :
- On pioche une boule dans l'urne et on note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
  - On replace la boule dans l'urne et on ajoute dans l'urne  $c$  boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - On pioche à nouveau une boule dans l'urne et on note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
- Donner la loi de  $X$ .
  - Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
  - Déterminer la loi de  $Y$ .
  - Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

- EXERCICE 7 -

On considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et  $Y$  la variable aléatoire au numéro de la deuxième boule.

- Justifier que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- On pose  $S = \max(X, Y)$ .
  - Justifier que pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , les évènements  $(S \leq k)$  et  $(X \leq k) \cap (Y \leq k)$  sont égaux.
  - En déduire  $P(S \leq k)$  puis donner la loi de  $S$ .

- EXERCICE 8 -

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , montrer que :  $P(X_j > k) = q^k$ .
- Justifier que  $[Z_n > k] = \bigcap_{j=1}^n [X_j > k]$ .
- En déduire  $P(Z_n > k)$  puis montrer que  $Z_n$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^n$ .

- EXERCICE 9 -

On considère  $B$  et  $G$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  et une loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

- On considère la variable aléatoire  $P = BG$ . Déterminer la loi de  $P$  et calculer  $E(P)$ .
- On considère la variable aléatoire  $S = B + G$ . Déterminer la loi de  $S$ . et calculer  $E(S)$ .

- EXERCICE 10 -

Soit  $Y$  une variable aléatoire dont la loi est donnée par :  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k) = (1 - e^{-1})e^{-k}$ . On considère une variable aléatoire  $U$  suivant la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  et indépendante de  $Y$ . Enfin, on considère  $T$  la variable aléatoire définie par :  $T = UY$ .

- Déterminer  $E(T)$ .
- Les variables  $Y$  et  $T$  sont-elles indépendantes?
- Montrer que  $E(YT) = E(Y)E(T) = 0$ .

- EXERCICE 11 -

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Soit  $S = X + Y$  et  $D = X - Y$ .

- Montrer que  $E(SD) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$  puis en déduire  $\text{cov}(S, D)$ .
- Les variables  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes?

- EXERCICE 12 -

On considère trois variables aléatoires  $U, V$  et  $W$ , indépendantes et telles que  $U$  et  $W$  suivent la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et  $V$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ . On pose :  $X = U + V$  et  $Y = V + W$ .

- Rappeler les lois de  $X$  et de  $Y$ .
- Montrer que  $\text{cov}(X, Y)$  existe et la calculer.
  - En déduire le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$ .

- EXERCICE 13 -

On considère une urne  $\mathcal{U}$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et indiscernables au toucher ( $n \geq 2$ ). On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne  $\mathcal{U}$ . Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro  $i$  au cours des  $k$  premiers tirages.

- Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Donner la loi de  $X_i$ . Rappeler l'espérance et la variance de  $X_i$ .
- Les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont-elles indépendantes?
- Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ .
  - Déterminer la loi de la variable  $X_i + X_j$ . Rappeler la variance de  $X_i + X_j$ .
  - En déduire la covariance du couple  $(X_i, X_j)$  puis interpréter son signe.

---

**Pour aller plus loin...**

---

- EXERCICE 14 -

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Reconnaitre la loi conditionnnelle de  $X$  sachant  $[X + Y = n]$ .

- EXERCICE 15 -

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité  $p$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On note  $N, X$  et  $Y$  respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

- Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels, calculer la probabilité  $P_{(N=j)}(X = i)$ .
  - En déduire la loi du couple  $(X, N)$ .
  - Montrer que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .
- Expliquer sans aucun calcul pourquoi  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda q$ .
- Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- Montrer que :  $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$ .
  - En déduire  $\text{cov}(N, X)$ .
  - Donner de même  $\text{cov}(N, Y)$ .