

- EXERCICE 1 -

On lance simultanément deux dés à trois faces (numérotées de 1 à 3) et on note  $X$  le maximum des numéros obtenus et  $Y$  le minimum des numéros obtenus.

1. Écrire une fonction "SimuXY()" qui simule cette expérience et qui renvoie les valeurs de  $X$  et  $Y$ .

```
1 def simuXY1() :
2     D1 = rd.randint(1,4)
3     D2 = rd.randint(1,4)
4     return (max(D1,D2),min(D1,D2))
```

2. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .

Clairement,  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ .  
D'autre part, si  $j > i$ , l'évènement  $(X = i) \cap (Y = j)$  est impossible donc  $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ .  
Pour les autres cas, on trouve les probabilités résumées dans le tableau suivant avec par exemple pour  $i = 2$  et  $j = 1$  avec des notations évidentes :

$$P((X = 2) \cap (Y = 1)) = P(D_1 = 1 \cap D_2 = 2 \cup D_1 = 2 \cap D_2 = 1) = P(D_1 = 1)P(D_2 = 2) + P(D_1 = 2)P(D_2 = 1) = \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

| <div><div>Y \ X</div></div> | 1             | 2             | 3             |
|-----------------------------|---------------|---------------|---------------|
| 1                           | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |
| 2                           | 0             | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |
| 3                           | 0             | 0             | $\frac{1}{9}$ |

3. Déterminer les lois marginales.

Par application de la FPT, on obtient les lois marginales en additionnant les colonnes (pour la loi de  $X$ ) et les lignes (pour la loi de  $Y$ ).  
Par exemple, en utilisant le SCE  $((Y = 1), (Y = 2), (Y = 3))$ , on a :

$$P(X = 2) = P((X = 2) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 2)) + P((X = 2) \cap (Y = 3)) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{3}$$

De même pour les autres, ce qui donne :

| <div><div>k</div></div>                     | 1             | 2             | 3             |
|---------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| <div><div><math>P(X = k)</math></div></div> | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{9}$ |

 et 

| <div><div>k</div></div>                     | 1             | 2             | 3             |
|---------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| <div><div><math>P(Y = k)</math></div></div> | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |

4. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

On a :

- $P((X = 1) \cap (Y = 2)) = 0$
- $P((X = 1)P(Y = 2)) = \frac{1}{9} \frac{1}{3} \neq 0$

donc  $P((X = 1) \cap (Y = 2)) \neq P((X = 1)P(Y = 2))$  donc les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

5. Déterminer la loi de la variable  $Z = Y - X$  ainsi que son espérance.

On a à priori :  $Z(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  (mais on peut aussi justifier que  $Z(\Omega) = \{-2, -1, 0\}$  car  $Y \leq X$ ).  
Par exemple :

$$P(Z = -1) = P((Y = 1) \cap (X = 2)) + P((Y = 2) \cap (X = 3)) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

De même pour les autre. On obtient alors :

| <div><div>k</div></div>                     | -2            | -1            | 0             | 1 | 2 |
|---------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---|---|
| <div><div><math>P(Z = k)</math></div></div> | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |

On en déduit que :  $E(Z) = -2 \frac{2}{9} - 1 \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}$ .

6. Déterminer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .

On a d'après le théorème de transfert :

$$\bullet E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 i j P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{9} + 0 + 0 + 2 \frac{2}{9} + 4 \frac{1}{9} + 0 + 3 \frac{2}{9} + 6 \frac{2}{9} + 9 \frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\bullet E(X) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$$

$$\bullet E(Y) = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{9}$$

donc

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - \frac{22 * 14}{81} = \frac{4 * 81 - 2 * 11 * 2 * 7}{81} = \frac{4 * (81 - 77)}{81} = \frac{16}{81}$$

- EXERCICE 2 -

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ , de loi conjointe :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer le réel  $a$ .

La loi du couple doit vérifier :  $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1$ . Or, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+1} j!} = a \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = a \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} e^1 = \frac{ae}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{ae}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = ae$$

Donc  $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1 \iff ae = 1 \iff a = \frac{1}{e}$ .

2. Déterminer les lois marginales.

• On a :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . D'après la FPT avec le SCE  $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$ , on a pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e} \frac{1}{2^{i+1} j!} = \frac{1}{e 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{e 2^{i+1}} e = \frac{1}{2^{i+1}}$$

• On a :  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ . D'après la FPT avec le SCE  $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ , on a pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e} \frac{1}{2^{i+1} j!} = \frac{1}{e j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1}{e j!}$$

3. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

On a pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :

$$P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \frac{1}{e j!} = \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = P([X = i] \cap [Y = j]) \quad \text{car } a = \frac{1}{e}$$

donc les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- EXERCICE 3 -

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est  $p \in ]0; 1[$  et de  $(n + 1)$  urnes numérotées de 0 à  $n$ .

Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , l'urne numérotée  $k$  contient  $k$  boules vertes et  $(n - k)$  boules rouges.

On considère l'expérience  $\mathcal{E}$  suivante : on lance  $n$  fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où pile a été obtenu.

Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces  $n$  lancers, on pioche dans l'urne 4.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus lors des  $n$  lancers et  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. **Reconnaitre la loi de la variable aléatoire  $X$ . En déduire la valeur de  $E(X)$  et  $E(X^2)$ .**  
 $X$  compte le nombre de succès (obtenir pile) lors de  $n$  épreuves de Bernoulli (lancer la pièce) identiques et indépendantes. Donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p : X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \text{ et pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On a alors :  $E(x) = np$  et  $V(X) = npq$ , ce qui donne :  $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = npq + (np)^2 = np(q + np)$ .

2. **Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .**  
Sachant que l'évènement  $(X = k)$  est réalisé, cela signifie que l'on pioche au hasard dans l'urne  $k$  dans laquelle la probabilité de piocher une boule verte vaut  $\frac{k}{n}$  (nombre de vertes sur total). Comme  $Y$  prend les valeurs 0 ou 1, la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{k}{n}$ .

3. **Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience et renvoie les valeurs de  $X$  et  $Y$ , les valeurs de  $n$  et  $p$  étant données en paramètres.**

*On rappelle que la commande "rd.binomial(n, p)" renvoie une réalisation de  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .*

On a vu que la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = k$  est une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{k}{n}$ . On simule

d'abord  $X$  puis on choisit  $p = \frac{X}{n}$ .

Pour simuler une loi de Bernoulli, on utilise une loi binomiale avec 1 seul tirage.

```

1 def simuXY3(n,p) :
2     X = rd.binomial(n, p)
3     Y = rd.binomial(1, X/n) # la proportion de verte dépend de X
4     return (X,Y)

```

4. (a) **Calculer  $P_{(X=0)}(Y = 0)$  et  $P_{(X=n)}(Y = 0)$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?**  
Sachant que l'évènement  $(X = 0)$  est réalisé, cela signifie que l'on pioche dans l'urne 0 qui ne contient que des boules rouges. Dans cette urne, on ne peut obtenir qu'une boule rouge donc l'évènement  $(Y = 0)$  est certain si  $(X = 0)$  est réalisé. Ainsi :  $P_{(X=0)}(Y = 0) = 1$ .  
Sachant que l'évènement  $(X = n)$  est réalisé, cela signifie que l'on pioche dans l'urne  $n$  qui ne contient que des boules vertes. Dans cette urne, on ne peut obtenir qu'une boule verte donc l'évènement  $(Y = 0)$  est impossible si  $(X = n)$  est réalisé. Ainsi :  $P_{(X=n)}(Y = 0) = 0$ .  
On a :

- d'une part :  $P((X = n) \cap (Y = 0)) = P(X = n)P_{(X=n)}(Y = 0) = 0$
- d'autre part :  $P(X = n) \neq 0$  (loi binomiale) et  $P(Y = 0) \neq 0$  (par exemple si on pioche dans l'urne 0). donc  $P((X = n) \cap (Y = 0)) \neq P(X = n)P(Y = 0)$  donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

- (b) **Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}$  puis en déduire que :  $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$ .**

On a vu que la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{k}{n}$ . Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}.$$

D'après la FPT avec le SCE  $(\tilde{X} = k)_{0 \leq k \leq n}$ , on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \sum_{k=0}^n P_{(X=k)}(Y = 1)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(X = k) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \frac{E(X)}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}.$$

- (c) **Donner la loi de  $Y$  et son espérance.**

$$\text{On a alors, } P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p.$$

Comme  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ ,  $Y$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $P(Y = 1) = p$ . Ainsi :  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

5. (a) **Montrer que :  $E(XY) = \sum_{k=1}^n kP(X = k \cap Y = 1)$  puis en déduire que :  $E(XY) = \frac{E(X^2)}{n} = p(q + np)$ .**

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\ell \in Y(\Omega)} k\ell P(X = k \cap Y = \ell) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^1 k\ell P(X = k \cap Y = \ell) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(X = k \cap Y = 1) \quad \text{car les termes sont nuls pour } \ell = 0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^n kP(X = k \cap Y = 1) = \sum_{k=1}^n kP(X = k)P_{(X=k)}(Y = 1) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(X = k) \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) = \frac{E(X^2)}{n} \end{aligned}$$

- (b) **En déduire la covariance du couple  $(X, Y)$ .**

On en déduit alors que :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{E(X^2)}{n} - E(X) \frac{E(X)}{n} = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{n} = \frac{V(X)}{n} = \frac{npq}{n} = pq.$$

- EXERCICE 4 -

1. **Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .**  
**Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on appelle espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  l'espérance de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .**

**On note alors  $E_{[X=k]}(Y)$  cette espérance conditionnelle, donnée par :**  $E_{[X=k]}(Y) = \sum_{i=1}^n iP_{[X=k]}(Y = i)$ .

**Montrer que :**  $E(Y) = \sum_{k=1}^n E_{[X=k]}(Y)P(X = k)$ .

Comme  $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^n iP(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^n i \sum_{k=1}^n P_{[X=k]}(Y = i)P(X = k) \quad \text{d'après la FPT avec le SCE } (X = k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} \\ &= \sum_{k=1}^n P(X = k) \sum_{i=1}^n iP_{[X=k]}(Y = i) \quad \text{en intervertissant les sommes} \\ &= \sum_{k=1}^n P(X = k)E_{[X=k]}(Y) \quad \text{par définition de } E_{[X=k]}(Y) \end{aligned}$$

2. **On dispose de  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$ . La boîte  $k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit  $X$  le numéro de la boîte et  $Y$  le numéro de la boule.**  
(a) **Déterminer la loi de  $X$ .**  
 $X$  suit clairement la loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .  
(b) **Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .**  
Sachant  $[X = k]$ , on effectue des tirages au hasard dans une urne contenant  $k$  boules. La loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est donc la loi uniforme sur  $\llbracket 1; k \rrbracket$ .

- (c) **En déduire l'espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .**

D'après la question précédente, l'espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est celle d'une loi uniforme, soit :  $E_{[X=k]}(Y) = \frac{k+1}{2}$ .

- (d) **Déduire de la question 1 l'espérance de  $Y$ .**

On a clairement  $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ . De plus,  $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$  car en particulier si on tire la boîte  $n$ , on peut tirer tous les numéros entre 1 et  $n$ .

On est donc dans les conditions d'application du résultat de la question 1 ce qui donne avec les résultats précédents :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^n E_{[X=k]}(Y)P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (k+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

- (e) **Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .**

On a vu que  $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On a :

- Si  $j > i$ ,  $P(X = i \cap Y = j) = 0$  car dans ce cas l'urne  $i$  ne contient pas la boule  $j$ .
- Si  $j \leq i$ ,  $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P_{[X=i]}(Y = j) = \frac{1}{n} \frac{1}{i}$  par équiprobabilité.

$$\text{Finalement, on a : } P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}.$$

- (f) **Déterminer la loi de  $Y$  sous forme d'une somme (qu'on ne cherchera pas à calculer).**

Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . D'après la formule des probabilités totales avec le SCE ( $X = i$ ) $_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ , on a :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) = \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = i) = \sum_{i=j}^n \frac{1}{n} \frac{1}{i} \quad \text{car la proba est nulle pour } i < j$$

formule que l'on ne peut pas simplifier. Ainsi,  $P(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$ .

## - EXERCICE 5 -

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité  $p$ .

On note  $q = 1 - p$ .

On dit que la première série est de longueur  $n \geq 1$  si les  $n$  premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le  $(n+1)$ -ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats FFPPPPPPFFFP... alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.

Soient  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. On suppose écrite une fonction "lancer(p)" qui renvoie 1 pour Pile et 0 pour Face.

Compléter alors la fonction suivante qui simule cette expérience et qui renvoie les valeurs de  $X_1$  et  $X_2$ , lorsque  $p$  est donné en paramètre.

```
1 def simuX1X2(p) :
2     Res1 = lancer(p) # résultat du premier lancer
3     X1 = 1 # on commence à compter la série 1
4     while lancer(p) == Res1 : # on obtient le même que le premier lancer
5         X1 = X1 + 1 # on compte
```

```
6     X2 = 1 # En sortie du while, on commence la série 2
7     while lancer(p) != Res1 : # on obtient le contraire que le premier lancer
8         X2 = X2 + 1 # on compte
9     return (X1, X2)
```

2. **Déterminer la loi de  $X_1$ .**

On a clairement  $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a alors avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= P(F_1 F_2 \dots F_k P_{k+1} \cup P_1 P_2 \dots P_k F_{k+1}) \\ &= q^k p + p^k q \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= p q (q^{k-1} + p^{k-1}) \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(X_1 = k) = p q (q^{k-1} + p^{k-1})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

3. **Montrer que  $X_1$  admet une espérance et que  $E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ .**

$X_1$  admet une espérance ssi  $\sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_1 = k)$  CVA ssi  $\sum_{k=1}^{+\infty} k p q (q^{k-1} + p^{k-1})$  CV.

Or, on a pour  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k p q (q^{k-1} + p^{k-1}) &= p q \left( \sum_{k=1}^N k q^{k-1} + \sum_{k=1}^N k p^{k-1} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p q \left( \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \right) = \frac{q}{p} + \frac{p}{q} \end{aligned}$$

car on reconnaît deux séries dérivées de la géométrie convergentes (car  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ ).

Ainsi,  $X_1$  admet une espérance et que  $E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ .

4. **Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ .**

On a clairement  $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , on a alors avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) &= P(\underbrace{F_1 \dots F_k}_{\text{série 1}} \underbrace{P_{k+1} \dots P_{k+\ell}}_{\text{série 2}} \underbrace{F_{k+\ell+1}}_{\text{fin série 2}} \cup \underbrace{P_1 \dots P_k}_{\text{série 1}} \underbrace{F_{k+1} \dots F_{k+\ell}}_{\text{série 2}} \underbrace{P_{k+\ell+1}}_{\text{fin série 2}}) \\ &= q^k p^\ell q + p^k q^\ell p \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= q^{k+1} p^\ell + p^{k+1} q^\ell \end{aligned}$$

En effet, il y a  $k$  faces (première série puis  $\ell$  piles (deuxième série) puis 1 pile pour terminer la deuxième série (et inversement)).

Ainsi,  $P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) = q^{k+1} p^\ell + p^{k+1} q^\ell$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell \in \mathbb{N}^*$ .

5. **En déduire la loi de  $X_2$ .**

D'après la FPT avec le SCE ( $[X = k]_{k \in \mathbb{N}^*}$ , on a pour tout  $\ell \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} P(X_2 = \ell) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k+1} p^\ell + p^{k+1} q^\ell \\ &= p^\ell q \sum_{k=1}^{+\infty} q^k + q^\ell p \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \\ &= p^\ell q \left( \frac{1}{1-q} - 1 \right) + q^\ell p \left( \frac{1}{1-p} - 1 \right) \\ &= p^\ell q \frac{q}{p} + q^\ell p \frac{p}{q} = p^{\ell-1} q^2 + q^{\ell-1} p^2 \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(X_2 = \ell) = p^{\ell-1} q^2 + q^{\ell-1} p^2$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}^*$ .

6. **Montrer que  $X_2$  admet une espérance et que  $E(X_2) = 2$ .**

$X_2$  admet une espérance ssi  $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell P(X_2 = \ell)$  CVA ssi  $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell (p^{\ell-1} q^2 + q^{\ell-1} p^2)$  CV.

Or, on a pour  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{\ell=1}^N \ell \left( p^{\ell-1} q^2 + q^{\ell-1} p^2 \right) = q^2 \sum_{\ell=1}^N \ell p^{\ell-1} + p^2 \sum_{\ell=1}^N \ell q^{\ell-1}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} q^2 \left( \frac{1}{(1-p)^2} \right) + p^2 \left( \frac{1}{(1-q)^2} \right) = 2$$

car on reconnaît deux séries dérivées de la géométrie convergentes (car  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ ). Ainsi,  $X_2$  admet une espérance et que  $E(X_2) = 2$ .

7. **Montrer que  $E(X_1 X_2)$  existe et que  $E(X_1 X_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ .**

D'après le théorème de transfert, on a :

$$E(X_1 X_2) \text{ existe ssi } \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} k \ell P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) \text{ CVA ssi } \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} k \ell \left( q^{k+1} p^\ell + p^{k+1} q^\ell \right) \text{ CV.}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^A \sum_{\ell=1}^B k \ell \left( q^{k+1} p^\ell + p^{k+1} q^\ell \right) &= \sum_{k=1}^A \sum_{\ell=1}^B k \ell q^{k+1} p^\ell + \sum_{k=1}^A \sum_{\ell=1}^B k \ell p^{k+1} q^\ell \\ &= \sum_{k=1}^A k q^{k+1} \sum_{\ell=1}^B \ell p^\ell + \sum_{k=1}^A k p^{k+1} \sum_{\ell=1}^B \ell q^\ell \\ &= q^2 p \sum_{k=1}^A k q^{k-1} \sum_{\ell=1}^B \ell p^{\ell-1} + p^2 q \sum_{k=1}^A k p^{k-1} \sum_{\ell=1}^B \ell q^{\ell-1} \\ &\xrightarrow{A, B \rightarrow +\infty} q^2 p \frac{1}{(1-q)^2} \frac{1}{(1-p)^2} + p^2 q \frac{1}{(1-p)^2} \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Ainsi,  $E(X_1 X_2)$  existe et on a  $E(X_1 X_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ .

8. **On suppose que  $p = 1/2$ . Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.**

On a d'après les calculs précédents, en remplaçant  $p$  et  $q$  par  $1/2$  :

$$P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) = (1/2)^{k+1} (1/2)^\ell + (1/2)^{k+1} (1/2)^\ell = 2(1/2)^{\ell+k+1} = (1/2)^{\ell+k}$$

et

$$P(X_1 = k) = (1/2)(1/2)((1/2)^{k-1} + (1/2)^{k-1}) = (1/2)^k \quad \text{et} \quad P(X_2 = \ell) = (1/2)^{\ell-1} (1/2)^2 + (1/2)^{\ell-1} (1/2)^2 = (1/2)^\ell$$

Ainsi, on a bien : pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell \in \mathbb{N}^*$  :  $P(X_1 = k \cap X_2 = \ell) = P(X_1 = k) \times P(X_2 = \ell)$  donc  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

9. **On suppose que  $p \neq 1/2$ . Vérifier que  $\text{cov}(X_1, X_2) = 4 - \frac{1}{pq}$  puis en déduire que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.**

On a, en remarquant que  $p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$  :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \\ &= \frac{1}{pq} - \frac{2(p^2 + q^2)}{pq} \\ &= \frac{1 - 2(1 - 2pq)}{pq} = \frac{4pq - 1}{pq} = 4 - \frac{1}{pq} \end{aligned}$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  étaient indépendantes, on aurait :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 0 \quad \text{soit} \quad pq = \frac{1}{4} \quad \text{soit} \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{après calculs}$$

Or,  $p \neq 1/2$  donc  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

## - EXERCICE 6 -

1. **Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On dit que les deux variables  $X$  et  $Y$  sont échangeables si :**

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = j] \cap [Y = i])$$

- (a) **On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes et de même loi. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables.**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes et de même loi, alors, pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{aligned} P(X = i \cap Y = j) &= P(X = i)P(Y = j) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= P(Y = i)P(X = j) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \\ &= P(X = j \cap Y = i) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes,} \end{aligned}$$

donc  $X$  et  $Y$  sont échangeables.

- (b) **On suppose que  $X$  et  $Y$  sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :**

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i)$$

Soit  $i \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) && \text{d'après la FPT avec le SCE } (Y = j)_{j \in \mathbb{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j \cap Y = i) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \\ &= P(Y = i) && \text{d'après la FPT avec le SCE } (X = j)_{j \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

On a donc bien :  $\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i)$ .

2. **Soient  $n, b$  et  $c$  trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches. On effectue l'expérience suivante :**

- **On pioche une boule dans l'urne et on note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.**
- **On replace la boule dans l'urne et on ajoute dans l'urne  $c$  boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.**
- **On pioche à nouveau une boule dans l'urne et on note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.**

- (a) **Donner la loi de  $X$ .**

On a  $X(\Omega) = \{1, 2\}$ .

$$\text{De plus, } P(X = 1) = P(N_1) = \frac{n}{b+n} \text{ et } P(X = 2) = P(B_1) = \frac{b}{b+n}$$

- (b) **Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .**

On a  $X(\Omega) = \{1, 2\}$  et  $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ .

On :  $P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1)P_{X=1}(Y = 1)$ .

Sachant  $X = 1$ , on a tiré une noire et donc rajouté  $c$  noires dans l'urne qui contient au moment du second tirage  $n + c$  noires et  $b$  blanches.

$$\text{On a donc : } P_{X=1}(Y = 1) = \frac{c+n}{n+b+c} \quad \text{et donc} \quad P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{n}{b+n} \frac{n+c}{n+b+c}.$$

De même, on obtient

$$P(X = 1 \cap Y = 2) = \frac{n}{b+n} \frac{b}{b+n+c},$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = \frac{b}{b+n} \frac{n}{b+n+c},$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2) = \frac{b}{b+n} \frac{b+c}{b+n+c}.$$

(c) **Déterminer la loi de  $Y$ .**

D'après la FPT avec le SCE ( $X = 1, X = 2$ ), on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1) \\ &= \frac{n}{b+n} \frac{n+c}{b+n+c} + \frac{n}{b+n} \frac{b}{b+n+c} = \frac{n(n+c+b)}{(b+n)(b+n+c)} = \frac{n}{b+n} \end{aligned}$$

On a alors :  $P(Y = 2) = 1 - P(Y = 1) = \frac{b}{b+n}$ .

(d) **Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.**

• On a :

$$P(X = 1 \cap Y = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1)$$

donc  $X$  et  $Y$  sont échangeables.

• On a

$$P(X = 1 \cap Y = 2) = \frac{bn}{(b+n)(b+n+c)} \quad \text{et} \quad P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{bn}{(b+n)(b+n)} \neq P(X = 1 \cap Y = 2)$$

donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

- EXERCICE 7 -

**On considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne.**

**On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et  $Y$  la variable aléatoire au numéro de la deuxième boule.**

1. **Justifier que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.**

Les tirages se faisant avec remise, l'urne garde la même composition entre les deux tirages. Donc  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

2. **On pose  $S = \max(X, Y)$ .**

(a) **Justifier que pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , les événements  $(S \leq k)$  et  $(X \leq k) \cap (Y \leq k)$  sont égaux.**

On a par définition de  $S$  :  $S \geq X$  et  $S \geq Y$ .

Ainsi, si  $(S \leq k)$  alors  $(X \leq S \leq k)$  et  $(Y \leq S \leq k)$  donc  $(X \leq k) \cap (Y \leq k)$ .

Réciproquement, si  $(X \leq k)$  et  $(Y \leq k)$  comme  $S = X$  ou  $S = Y$ , on a :  $(S \leq k)$ .

Finalement, les événements  $(S \leq k)$  et  $(X \leq k) \cap (Y \leq k)$  sont égaux.

(b) **En déduire  $P(S \leq k)$  puis donner la loi de  $S$ .**

On a alors en utilisant l'indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned} P(S \leq k) &= P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) \\ &= P(X \leq k)P(Y \leq k) \quad \text{par indépendance de } X, Y \\ &= \frac{k}{n} \frac{k}{n} \quad \text{car } P(X \leq k) = P(X = 1 \cup \dots \cup X = k) = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } P(S \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pour obtenir la loi de  $S$ , on remarque que :  $(S \leq k) = (S \leq k-1) \cup (S = k)$  ce qui donne :

$$P(S = k) = P(S \leq k) - P(S \leq k-1).$$

On a alors :

$$P(S = k) = P(S \leq k) - P(S \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

- EXERCICE 8 -

**On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .**

1. **Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , montrer que :  $P(X_j > k) = q^k$ .**

L'évènement  $(X_j \geq k)$  signifie que l'on obtient au moins  $k$  échecs avant le premier succès. En notant  $E_i$  un échec au rang  $i$ , on a donc :  $(X_j > k) = (E_1 \cap \dots \cap E_k)$  peu importe ce qui suit. On a donc par indépendance :

$$P(X_j > k) = P(E_1 \cap \dots \cap E_k) = q^k$$

2. **Justifier que  $[Z_n > k] = \bigcap_{j=1}^n [X_j > k]$ .**

On a par définition de  $Z_n$  (min des  $X_j$ ) :  $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad Z_n \leq X_j$ .

Ainsi, si  $(Z_n > k)$  alors  $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $(X_j \geq Z_n > k)$  donc  $\bigcap_{j=1}^n [X_j > k]$ .

Réciproquement, si  $\bigcap_{j=1}^n [X_j > k]$ ,  $Z_n$  étant l'une des variables  $X_j$ , on a bien  $(Z_n > k)$ .

Finalement  $[Z_n > k] = \bigcap_{j=1}^n [X_j > k]$ .

3. **En déduire  $P(Z_n > k)$  puis montrer que  $Z_n$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^n$ .**

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Z_n > k) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j > k]\right) \\ &= \prod_{j=1}^n P(X_j > k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \prod_{j=1}^n q^k = (q^k)^n = q^{nk} \end{aligned}$$

Comme  $X_j(\Omega) = \mathbb{N}^*$ , on a également :  $Z_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$P(Z_n = k) = P(Z_n > k-1) - P(Z_n > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = (q^n)^{(k-1)} (1 - q^n)$$

Ainsi,  $Z_n$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^n$ .

- EXERCICE 9 -

**On considère  $B$  et  $G$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli**

**$\mathcal{B}(p)$  et une loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ .**

1. **On considère a variable aléatoire  $P = BG$ . Déterminer la loi de  $P$  et calculer  $E(P)$ .**

On a  $B(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$  donc  $P(\Omega) = BG(\Omega) = \mathbb{N}$ .

Pour  $k = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} P(P = 0) &= P(BG = 0) \\ &= P(B = 0) \quad \text{car } G \neq 0 \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} P(P = k) &= P(BG = k) \\ &= P(B = 1 \cap G = k) \quad \text{car } B(\Omega) = \{0, 1\} \\ &= P(B = 1)P(G = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= p \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \\ &= p \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(P = 0) = 1 - p$  et  $P(P = k) = \frac{p}{2^k}$  pour  $k \geq 1$ .

Comme  $B$  et  $G$  sont indépendantes, on a :  $E(P) = E(BG) = E(B)E(G) = p \frac{1}{1/2} = 2p$ .

2. **On considère a variable aléatoire**  $S = B + G$ . **Déterminer la loi de S et calculer**  $E(S)$ .  
On a  $B(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$  donc  $S(\Omega) = BG(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .  
Pour  $k = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} P(S = 1) &= P(B + G = 1) \\ &= P(B = 0 \cap G = 1) \quad \text{car si } B = 1, B + G \geq 2 \\ &= P(B = 0)P(G = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - p)\frac{1}{2} = \frac{1 - p}{2} \end{aligned}$$

Pour tout  $k \geq 2$ , on a :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(B + G = k) \\ &= P((B = 0 \cap G = k) \cup (B = 1 \cap G = k - 1)) \quad \text{car } k \geq 2 \text{ donc } k - 1 \geq 1 \\ &= P(B = 0)P(G = k) + P(B = 1)P(G = k - 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - p)\left(\frac{1}{2}\right)^k + p\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1 - p}{2^k} + \frac{p}{2^{k-1}} = \frac{1 - p + 2p}{2^k} = \frac{1 + p}{2^k} \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(S = 1) = \frac{1 - p}{2}$  et  $P(S = k) = \frac{1 + p}{2^k}$  pour  $k \geq 2$ .

Par linéarité de l'espérance, on a :  $E(S) = E(B + G) = E(B) + E(G) = p + \frac{1}{1/2} = p + 2$ .

- **EXERCICE 10 -**  
**Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par :**  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  **et pour tout**  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k) = (1 - e^{-1})e^{-k}$ .  
**On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur**  $\{-1, 1\}$  **et indépendante de Y.**  
**Enfin, on considère T la variable aléatoire définie par :**  $T = UY$ .

1. **Déterminer**  $E(T)$ .  
On a :  $E(T) = E(UY) = E(U)E(Y)$  par indépendance de  $U$  et  $Y$ .  
Or, on a :  $E(U) = -1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0$  donc  $E(T) = 0$ .  
2. **Les variables Y et T sont-elles indépendantes?**  
On cherche un contre-exemple pour montrer que les variables ne sont pas indépendantes.  
D'une part :  $P((T = 1) \cap (Y = 0)) = P((UY = 1) \cap (Y = 0)) = P((0 = 1) \cap (Y = 1)) = 0$   
car l'évènement  $(0 = 1)$  est impossible.  
D'autre part :  
 $P(T = 1) = P((U = 1) \cap (Y = 1)) = P(U = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})e^{-1} \neq 0$  et  $P(Y = 0) = (1 - e^{-1}) \neq 0$   
donc  $P(T = 1)P(Y = 0) \neq 0$ .  
Ainsi, les variables  $T$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.  
3. **Montrer que**  $E(YT) = E(Y)E(T) = 0$ .  
On a vu que :  $E(T) = 0$  donc  $E(Y)E(T) = 0$ .  
D'autre part :  $E(YT) = E(YUY) = E(UY^2) = \underbrace{E(U)}_{=0}E(Y^2) = 0$  car les variables  $U$  et  $Y$  sont indépendantes  
  
(donc  $U$  et  $Y^2$  aussi par lemme des coalitions).  
Ainsi :  $E(YT) = E(Y)E(T) = 0$ .

- **EXERCICE 11 -**  
**Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.**  
**Soit**  $S = X + Y$  **et**  $D = X - Y$ .  
1. **Montrer que**  $E(SD) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$  **puis en déduire**  $\text{cov}(S, D)$ .  
On a :  $SD = (X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2$  donc  $E(SD) = E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2)$  par linéarité de l'espérance.

Mais comme  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, on a :  $E(X^2) = E(Y^2)$ , ce qui donne :  $E(SD) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$ .  
Comme  $X$  et  $Y$  admettent des moments d'ordre 2,  $S$  et  $D$  également et on a :

$$\text{cov}(S, D) = E(SD) - E(S)E(D)$$

D'autre part, on a par linéarité de l'espérance :  $E(S) = E(X) + E(Y) = 2p$  et  $E(D) = E(X) - E(Y) = 0$ .  
Finalement, on obtient :  $\text{cov}(S, D) = E(SD) - E(S)E(D) = 0$ .

2. **Les variables S et D sont-elles indépendantes?**  
Comparons  $P(S = 0 \cap D = 0)$  et  $P(S = 0)P(D = 0)$ . On a :

$$P(S = 0 \cap D = 1) = 0 \quad \text{car cet évènement est impossible car il implique } X = Y = 0 \text{ donc } D \neq 1$$

et

$$P(S = 0)P(D = 1) \neq 0 \text{ car } 0 \in S(\Omega) \text{ (} X = Y = 0 \text{) et } 1 \in D(\Omega) \text{ (} X = 1, Y = 0 \text{)}$$

Ainsi,  $S$  et  $D$  ne sont pas indépendantes (bien que leur covariance soit nulle).

- **EXERCICE 12 -**  
**On considère trois variables aléatoires U, V et W, indépendantes et telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre λ > 0 et V suit la loi de Poisson de paramètre μ > 0.**  
**On pose :**  $X = U + V$  **et**  $Y = V + W$ .  
1. **Rappeler les lois de X et de Y.**  
Les variables  $U$ ,  $V$  et  $W$  étant indépendantes, on a par stabilité des lois de Poisson :  
 $X = U + V \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$  et  $Y = V + W \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .  
2. (a) **Montrer que**  $\text{cov}(X, Y)$  **existe et la calculer.**  
Comme  $U$ ,  $V$  et  $W$  admettent un moment d'ordre 2, c'est aussi le cas de  $X = U + V$  et  $Y = V + W$  donc  $\text{cov}(X, Y)$  existe et on a :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(U + V, V + W) = \text{cov}(U, V) + \text{cov}(U, W) + \text{cov}(V, V) + \text{cov}(V, W) = 0 + 0 + V(V) + 0 = V(V)$$

car la covariance de deux variables indépendantes est nulle. Ainsi,  $\text{cov}(X, Y) = V(V) = \mu$

- (b) **En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.**  
On a par définition :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{V(V)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda + \mu}\sqrt{\lambda + \mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- **EXERCICE 13 -**  
**On considère une urne ℳ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher (n ≥ 2).**  
**On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne ℳ.**  
**Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout i ∈ [1; n], on note Xi la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.**

1. **Soit i ∈ [1; n]. Donner la loi de Xi. Rappeler l'espérance et la variance de Xi.**  
La variable  $X_i$  compte le nombre de succès lors de la répétition de  $k$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès  $\frac{1}{n}$  donc  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)$ .  
De plus, on a :  $E(X_i) = \frac{k}{n}$  et  $V(X_i) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .  
2. **Les variables aléatoires X1, X2, ..., Xn sont-elles indépendantes?**  
 $(i, j) \in [1; n]^2$  avec  $i \neq j$ . L'évènement  $[X_i = k \cap X_j = k]$  est impossible puisqu'il n'y a que  $k$  tirages donc :  
 $P(X_i = k \cap X_j = k) = 0$ .  
Or, on a d'après la question précédente :  $P(X_i = k) \neq 0$  et  $P(X_j = k) \neq 0$ .  
Ainsi, on a :  $P(X_i = k \cap X_j = k) \neq P(X_i = k) \times P(X_j = k)$  donc les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ne sont pas indépendantes.  
3. **Soit (i, j) ∈ [1; n]² tel que i ≠ j.**

- (a) **Déterminer la loi de la variable  $X_i + X_j$ . Rappeler la variance de  $X_i + X_j$ .**

La variable  $X_i + X_j$  compte le nombre de succès (obtenir la boule  $i$  ou la boule  $j$ ) lors de la répétition de  $k$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès  $\frac{2}{n}$ .

Ainsi,  $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)$ . De plus, on a :  $V(X_i + X_j) = \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ .

- (b) **En déduire la covariance du couple  $(X_i, X_j)$  puis interpréter son signe.**

On a :  $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{cov}(X_i, X_j)$  ce qui donne :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2} (V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)) = \frac{1}{2} \left( \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{4k}{n^2} + \frac{2k}{n^2} \right) = \frac{-k}{n^2}$$

Ainsi, on a :  $\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{-k}{n^2} < 0$ . Si le nombre de boules numérotées  $i$  a tendance à augmenter, alors, le nombre de boules numérotées  $j$  aura tendance à diminuer.

---

Pour aller plus loin...

---

#### - EXERCICE 14 -

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Reconnaitre la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[X + Y = n]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , il s'agit de calculer  $P_{[X+Y=n]}(X = k)$ .

Commençons par remarquer que comme  $Y \geq 0$ , on a :  $X + Y \geq X$ .

Ainsi, si  $k > n$ , alors :  $P_{[X+Y=n]}(X = k) = 0$ .

Pour  $k \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} P_{[X+Y=n]}(X = k) &= \frac{P((X = k) \cap (X + Y = n))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P((X = k) \cap (Y = n - k))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \quad \text{car les variables } X, Y \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$  sont indépendantes, on a par stabilité des lois de Poisson,  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{[X+Y=n]}(X = k) &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{e^{-(\lambda+\mu)} \lambda^k \mu^{n-k}}{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n} \\ &= \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^k (\lambda+\mu)^{n-k}} \\ &= \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left( \frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

On reconnait la formule de la loi binomiale.

Ainsi, la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[X + Y = n]$  est la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ .

#### - EXERCICE 15 -

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité  $p$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On note  $N$ ,  $X$  et  $Y$  respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

1. (a) **Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels, calculer la probabilité  $P_{(N=j)}(X = i)$ .**

Sachant  $N = j$ , on lance  $j$  fois la pièce. Ainsi,  $X$  compte le nombre de succès (obtenir pile) lors de la répétition de  $j$  épreuves de Bernoulli (lancer la pièce) identiques et indépendantes, de probabilité de succès  $p$ . On reconnait donc une loi binomiale de paramètre  $j$  et  $p$ . Ainsi, on a :

$$P_{(N=j)}(X = i) = \begin{cases} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} & \text{si } 0 \leq i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \quad \text{évènement impossible} \end{cases}$$

- (b) **En déduire la loi du couple  $(X, N)$ .**

Comme  $N$  suit une loi de Poisson, on a :  $N(\Omega) = \mathbb{N}$ .

D'autre part,  $X$  peut prendre toute valeur prise par  $N$  donc  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .

On a alors :  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$P(X = i \cap N = j) = P_{(N=j)}(X = i) P(N = j)$$

$$P(X = i \cap N = j) = \begin{cases} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

- (c) **Montrer que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .**

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . D'après la formule des probabilités totales avec le SCE ( $N = j$ ) $_{j \in \mathbb{N}}$ , on a :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i \cap N = j) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} 0 + \sum_{j=i}^{+\infty} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} p^i \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{j!}{i!(j-i)!} q^{j-i} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^i}{i!} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{1}{(j-i)!} q^{j-i} \lambda^j \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} q^k \lambda^{k+i} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\lambda q)^k \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{q\lambda} \\ &= e^{(q-1)\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \end{aligned}$$

On peut donc affirmer (en bombant le torse après ce magnifique calcul) que

$X$  suit bien une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$  et on peut fièrement passer à la question suivante.

2. **Expliquer sans aucun calcul pourquoi  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda q$ .**

$X$  et  $Y$  jouent des rôles symétriques. Donc en remplaçant dans le raisonnement précédent  $X$  par  $Y$ , pile par face et  $p$  par  $q$ , on en déduit que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda q$ .

3. **Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.**

En remarquant que  $N = X + Y$ , on a :  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} P(X = i \cap Y = j) &= P(X = i \cap N - X = j) \\ &= P(X = i \cap N = j + i) \\ &= \binom{j+i}{i} p^i q^j \frac{\lambda^{j+i}}{(j+i)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(j+i)!}{i!j!} \frac{\lambda^{j+i}}{(j+i)!} p^i q^j e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{j+i}}{i!j!} p^i q^j e^{-\lambda} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P(X = i)P(Y = j) &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda(p+q)} \frac{p^i q^j \lambda^{i+j}}{i!j!} \\ &= \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!} p^i q^j e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i \cap N - X = j) = P(X = i)P(Y = j)$  donc  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

4. (a) **Montrer que :**  $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$ .

Il faut faire le lien entre  $Y$ ,  $N$  et  $X$ .

Toujours en remarquant que  $N = X + Y$  et donc que  $Y = N - X$ , on a :

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(N - X) \\ &= V(N) + V(-X) + 2\text{cov}(N, -X) \\ &= V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X) \quad \text{car } V(-X) = (-1)^2 V(X) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :  $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$ .

(b) **En déduire**  $\text{cov}(N, X)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{cov}(N, X) &= \frac{V(N) + V(X) - V(Y)}{2} \\ &= \frac{\lambda + \lambda p - \lambda q}{2} \\ &= \frac{\lambda(1 + p - q)}{2} \\ &= \frac{\lambda(2p)}{2} = \lambda p \end{aligned}$$

Donc  $\text{cov}(N, X) = \lambda p$ .

(c) **Donner de même**  $\text{cov}(N, Y)$ .

Par symétrie de  $X$  et de  $Y$  (et de  $p$  et  $q$ ), on a :  $\text{cov}(N, Y) = \lambda q$ .

Ou par le calcul :

$$\text{cov}(N, Y) = \text{cov}(N, N - X) = \text{cov}(N, N) - \text{cov}(N, X) = V(N) - \text{cov}(N, X) = \lambda - \lambda p = \lambda q$$