

- EXERCICE 1 -**
On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
 - Dans cette question, on utilise une méthode, appelée méthode de variation de la constante qui permet d'obtenir une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
 - Soit λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir que :
$$f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$
 - En déduire une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
 - Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

- EXERCICE 2 -**
1. Soit λ un réel fixé. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $x'(t) = x(t) + \lambda e^t$ que l'on cherchera sous la forme $x_p(t) = kte^t$.
2. Résoudre le système différentiel suivant où x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$.

- EXERCICE 3 -**
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante (notée $(\mathcal{E})$) :
- $$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \quad (\mathcal{E})$$

- où y est une fonction définie et dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$.
- On note, pour tout $x \in \mathbb{R} : Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.
- Déterminer une matrice M telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : Y'(x) = MY(x)$.
 - On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que P est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de M .
 - En déduire que M est diagonalisable puis donner une matrice D diagonale vérifiant : $D = P^{-1}MP$.

La matrice M étant diagonalisable, le cours nous permet d'obtenir l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = MY$. Dans la question suivante, on souhaite obtenir les solutions sans utiliser ce résultat.

- On définit, pour tout $x \in \mathbb{R} : Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et on note $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ où u, v et w sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
 - Justifier que $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : Z'(x) = DZ(x) \quad (\mathcal{E}')$.
 - En déduire les solutions de $(\mathcal{E}')$ puis celle de $(\mathcal{E})$.

- EXERCICE 4 -**
On considère le système différentiel $(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à $(\mathcal{E})$ de telle sorte que : $X' = AX$.
 - Calculer $A^3 - 3A^2$.
 - En déduire les valeurs propres possibles de A .
 - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
 - Déterminer les points d'équilibre de $(\mathcal{E})$.

- Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.
- Donner une trajectoire convergente et une trajectoire divergente.

- EXERCICE 5 -**
On considère le système différentiel $(\mathcal{E}_2) \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$ et on note A la matrice associée.
- Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une infinité de points d'équilibre et les déterminer.
 - Justifier qu'il existe une base (U, V, W) de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
 - On donne : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.
 - Les trajectoires de $(\mathcal{E})$ sont-elles convergentes?
 - Déterminer toutes les trajectoires qui convergent vers un état d'équilibre.
 - Déterminer $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que la solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$ converge vers le point d'équilibre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 6 -**
On considère le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ suivant : $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$ où x, y, z sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à $(\mathcal{E})$ de telle sorte que : $X' = AX$.
- On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A . On pose $u = e_2 + e_3$ et $v = e_1 + e_3$.
 - Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
 - Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(w) = 2v - w$.
 - Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice T de f dans $\mathcal{C}$.
 - Justifier qu'il existe une matrice P inversible telle que : $A = PTP^{-1}$ puis déterminer la matrice P .
- On pose $Y = P^{-1}X$.
Montrer que : $X' = AX \iff Y' = TY$.
- Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1) : \varphi' = \varphi$.
 - Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.
 - Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.
- On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.
Montrer que α est solution de $(\mathcal{E}_1)$, γ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et β est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.
- En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1) e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2) e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

- En déduire une solution de (E) non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système.