

- EXERCICE 1 -

On considère l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) : $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à ($\mathcal{E}$).

On résout l'équation homogène ($\mathcal{E}_0$) : $y' + y = 0$ dont les solutions sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Dans cette question, on utilise une méthode, appelée méthode de variation de la constante qui permet d'obtenir une solution particulière de ($\mathcal{E}$).

(a) Soit λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir que :

$$f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par produit et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) &\iff f'(x) + f(x) = \frac{1}{1 + e^x} \\ &\iff \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x} \\ &\iff \lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x} \\ &\iff \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{aligned}$$

(b) En déduire une solution particulière de ($\mathcal{E}$).

D'après la question précédente, si la fonction λ vérifie $\lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, alors $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$ est solution de ($\mathcal{E}$).

On peut donc choisir pour lambda n'importe quelle primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}$.

On continue le raisonnement :

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \lambda(x)e^{-x} \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \\ &\iff \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &\iff \lambda(x) = \ln(1 + e^x) + k \quad \text{par primitivation car } \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ est de la forme } u'/u \end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln(1 + e^x)$ et ainsi, $f(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de ($\mathcal{E}$).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de ($\mathcal{E}$).

Les solutions de ($\mathcal{E}$) sont donc de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$

- EXERCICE 2 -**1. Soit λ un réel fixé. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $x'(t) = x(t) + \lambda e^t$ que l'on cherchera sous la forme $x_p(t) = kte^t$.**

On cherche une solution particulière sous la forme $x_p(t) = kte^t$. On dérive ce qui donne $x'_p(t) = ke^t + kte^t$ et on injecte dans l'équation ce qui donne :

$$ke^t + kte^{2t} = kte^t + \lambda e^{2t} \iff ke^t = \lambda e^t \iff k = \lambda$$

Ainsi, une solution particulière est $x_p(t) = \lambda te^t$.

2. Résoudre le système différentiel suivant où x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$.

L'équation différentielle $y' = y$ (deuxième ligne du système) qui se réécrit $y' - y = 0$ est une équation linéaire homogène dont les solutions sont de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On injecte cette solution dans la première ligne du système, ce qui donne : $x'(t) = x(t) + \lambda e^t$.

On a trouvé à la première question une solution particulière de cette équation $x_p(t) = \lambda te^t$.

D'autre part, les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \mu e^t$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de cette équation sont $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda te^t + \mu e^t = (\lambda t + \mu)e^t$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Finalement les solutions du système différentiel sont : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda t + \mu)e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- EXERCICE 3 -

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante (notée ($\mathcal{E}$)) :

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \quad (\mathcal{E})$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = MY(x)$.

On cherche M telle que : $\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$.

Il s'agit donc d'exprimer y''' en fonction de y , y' et y'' .

Or, l'équation ($\mathcal{E}$) : $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ donne : $y''' = -2y'' + y' + 2y$.

Ainsi, on a : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**(a) Montrer que P est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de M .**

Il s'agit de montrer que les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs

propres de M . Or, on a :

- $MU = -2U$ et $U \neq 0$ donc U est un vecteur propre de M associé à la valeur propre -2 .
- $MV = -V$ et $V \neq 0$ donc V est un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1 .
- $MW = W$ et $W \neq 0$ donc W est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1 .

La famille (U, V, W) est libre comme concaténation de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Comme elle contient 3 vecteurs et que $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée vecteurs propres de M .

Ainsi, P est bien la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de M (la base (U, V, W)).

(b) En déduire que M est diagonalisable puis donner une matrice D diagonale vérifiant : $D = P^{-1}MP$.

D'après la question précédente, (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée vecteurs propres de M donc M est diagonalisable et on a d'après la formule de changement de base : $M = PDP^{-1}$ (soit

$$D = P^{-1}MP) \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ l'ordre des valeurs propres étant imposé par l'ordre des vec-}$$

teurs propres dans P .

La matrice M étant diagonalisable, le cours nous permet d'obtenir l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = MY$. Dans la question suivante, on souhaite obtenir les solutions sans utiliser ce résultat.

3. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et on note $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ où u, v et w sont des fonctions

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- (a) Justifier que $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Z'(x) = DZ(x)$ ($\mathcal{E}'$).
On a ; $\forall x \in \mathbb{R}$: $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ ce qui donne par linéarité de la dérivation : $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$.
On a alors, en remarquant que $Z' = P^{-1}Y' \iff Y' = PZ'$ et en utilisant la relation $M = PDP^{-1}$:

$$\begin{aligned} Y' &= MY \iff PZ' = PDP^{-1}Y \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{=I}Z' = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}Y}_{=Z} \\ &\iff Z' = DZ \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Z'(x) = DZ(x)$ ($\mathcal{E}'$).

- (b) En déduire les solutions de ($\mathcal{E}'$) puis celle de ($\mathcal{E}$).
Le système différentiel $Z'(x) = DZ(x)$ ($\mathcal{E}'$) est diagonal, ce qui donne :

$$\begin{cases} u'(x) = -2u(x) \\ v'(x) = -v(x) \\ w'(x) = w(x) \end{cases} \iff \begin{cases} u(x) = \lambda e^{-2x} \\ v(x) = \mu e^{-x} \\ w(x) = \gamma e^x \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Or, on a vu à la question précédente que Y est solution de $Y' = MY$ si et seulement si $Z = P^{-1}Y$ est solution de $Z' = DZ$.

Les solutions de $Y' = MY$ sont donc

$$Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{-2x} \\ \mu e^{-x} \\ \gamma e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} + \gamma e^x \\ \star \\ \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$$

Seule la première ligne nous intéresse pour obtenir les solutions de ($\mathcal{E}$) : $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ qui sont donc de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$: $y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} + \gamma e^x$ avec $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

- EXERCICE 4 -

On considère le système différentiel ($\mathcal{E}$) $\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à ($\mathcal{E}$) de telle sorte que : $X' = AX$.

La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à ($\mathcal{E}$) est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer $A^3 - 3A^2$.

On obtient : $A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2A$.

3. En déduire les valeurs propres possibles de A .

D'après la question précédente, on a : $A^3 - 3A^2 = -2A$ donc $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

Ainsi, le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de A . Déterminons les racines de P qui sont les valeurs propres possibles de A . On a :

$$P(X) = 0 \iff X(X^2 - 3X + 2) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = 2$$

Ainsi, les racines de P sont $\{0, 1, 2\}$ donc les valeurs propres possibles de A sont $\{0, 1, 2\}$: $Sp(A) \subset \{0, 1, 2\}$.

4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

On obtient :

- $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(U) \neq \{0\}$ donc $0 \in Sp(A)$ et $E_0(A) = \text{Vect}(U)$.

- $\text{Ker}(A - I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(V) \neq \{0\}$ donc $1 \in Sp(A)$ et $E_1(A) = \text{Vect}(V)$.

- $\text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(W) \neq \{0\}$ donc $2 \in Sp(A)$ et $E_2(A) = \text{Vect}(W)$.

Ainsi, $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$.

5. Déterminer les points d'équilibre de ($\mathcal{E}$).

Les points d'équilibres de ($\mathcal{E}$) sont des solutions X de ($\mathcal{E}$) constituées de fonctions constantes donc vérifiant $X' = 0$ soit $AX = 0$ soit $X \in \text{Ker}(A)$.

Or, on a vu que : $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donc les points d'équilibre sont : $\{(\lambda, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6. Déterminer les solutions de ($\mathcal{E}$).

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. On obtient donc les solutions de ($\mathcal{E}$) avec les valeurs propres et les vecteurs propres obtenus précédemment :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \lambda e^{0t}U + \mu e^tV + \gamma e^{2t}W, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{soit} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \gamma e^{2t} \\ \lambda + \mu e^t + \gamma e^{2t} \\ -\lambda - \mu e^t + \gamma e^{2t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

7. Donner une trajectoire convergente et une trajectoire divergente.

- Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} = +\infty$, les trajectoires seront divergentes si $\mu \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$.

Ainsi, par exemple, la trajectoire $\{(0, e^t, -e^t),\}$ est une trajectoire divergente (pour $\lambda = 0, \mu = 1$ et $\gamma = 0$). Il y en a une infinité d'autres.

- Pour obtenir des trajectoires convergentes, il faut choisir $\mu = 0$ et $\gamma = 0$, ce qui donne $\{(\lambda, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, les trajectoires convergentes sont toutes des points d'équilibre, par exemple pour $\lambda = 1$: $\{(1, 1, -1)\}$.

- EXERCICE 5 -

On considère le système différentiel ($\mathcal{E}$) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$ et on note A la matrice associée.

1. Montrer que ($\mathcal{E}$) admet une infinité de points d'équilibre et les déterminer.

Commençons par donner la matrice A : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les points d'équilibres de ($\mathcal{E}$) sont des solutions X de ($\mathcal{E}$) constituées de fonctions constantes donc vérifiant $X' = 0$ soit $AX = 0$ soit $X \in \text{Ker}(A)$.

On obtient après calcul : $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donc les points d'équilibre sont : $\{(\lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Justifier qu'il existe une base (U, V, W) de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi : $Sp(A) = \{-1, 0, 2\}$. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

Ainsi, il existe une base (U, V, W) de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (car A est diagonalisable).

3. On donne : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En déduire les solutions de ($\mathcal{E}$).

On cherche les valeurs propres associées aux vecteurs propres U, V et W . On calcule

$$AU = -U, \quad AV = 0, \quad AW = 2W$$

ce qui permet d'obtenir les solutions de ($\mathcal{E}$)

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \lambda e^{-t}U + \mu e^{0t}V + \gamma e^{2t}W, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{soit} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} + \mu + \gamma e^{2t} \\ \mu + 3\gamma e^{2t} \\ 6\gamma e^{2t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

4. Les trajectoires de $(\mathcal{E})$ sont-elles convergentes ?

Toutes les trajectoires de $(\mathcal{E})$ ne sont pas convergentes car si $\gamma \neq 0$, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} = +\infty$.

5. Déterminer toutes les trajectoires qui convergent vers un état d'équilibre.

Pour obtenir des trajectoires convergentes, il faut choisir $\gamma = 0$ ce qui donne comme trajectoires :

$$\{(\lambda e^{-t} + \mu, \mu, 0), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mu$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \mu$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$, ces trajectoires convergent vers l'état d'équilibre $(\mu, \mu, 0)$.

6. Déterminer $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que la solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$ converge vers le point d'équilibre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que la solution correspondante qui est de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} + \mu + \gamma e^{2t} \\ \mu + 3\gamma e^{2t} \\ 6\gamma e^{2t} \end{pmatrix}$

vérifie :

• d'une part : $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \gamma \\ \mu + 3\gamma \\ 6\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

• et d'autre part : $\begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda e^{-t} + \mu + \gamma e^{2t} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu + 3\gamma e^{2t} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} 6\gamma e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car qui converge vers le point d'équilibre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} 6\gamma e^{2t} = 0$ donne $\gamma = 0$

puis la condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\mu + 3}_{=0} e^{2t} = 1$ donne $\mu = 1$

et enfin la condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda e^{-t} + \underbrace{\mu}_{=1} + \underbrace{\gamma}_{=0} e^{2t} = 1$ donne λ quelconque soit une infinité de choix pour λ .

Par exemple, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ et $\gamma = 0$ convient.

La condition $\begin{pmatrix} \lambda + \mu + \gamma \\ \mu + 3\gamma \\ 6\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ permet alors de trouver les valeurs $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$.

En choisissant une autre valeur pour λ , on obtiendrait une autre solution convergeant vers ce même état d'équilibre. Il y en a donc une infinité.

- EXERCICE 6 -

On considère le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ suivant : $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$ où x, y, z sont des fonctions

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à $(\mathcal{E})$ de telle sorte que : $X' = AX$.

On a clairement : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A . On pose $u = e_2 + e_3$ et $v = e_1 + e_3$.

(a) Calculer $f(u)$ et $f(v)$.

On a $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$. Raisonnons matriciellement, en notant U et V les vecteurs colonnes associés à u et v :

- $AU = U$ donc $f(u) = u$.
- $AV = -V$ donc $f(v) = -v$.

(b) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(w) = 2v - w$.

On cherche $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = 2v - w$. Raisonnons matriciellement :

$$\begin{aligned} f(w) = 2v - w &\iff AW = 2V - W \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a + 2b - 2c = 2 - a \\ -4a - 3b + 4c = -b \\ -2a + c = 2 - c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b - c = 1 \\ -2a - b + 2c = 0 \\ -a + c = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -2a - 2 + 2c = 0 \\ -a + c = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ c = 1 + a \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient une infinité de solution de la forme $(a, 2, 1 + a)$.

Pour $a = 0$ par exemple, le vecteur $w = (0, 2, 1)$ convient.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice T de f dans $\mathcal{C}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} b = 0 \\ a + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a + 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases}$$

La famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est donc libre et composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, on a :

$$f(u) = u; \quad f(v) = -v \quad f(w) = 2v - w$$

donc $T = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Justifier qu'il existe une matrice P inversible telle que : $A = PTP^{-1}$ puis déterminer la matrice P .

Les matrices A et T représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes donc elles sont semblables. Ainsi, il existe une matrice P inversible qui est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ telle que : $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P dépend du vecteur w trouvé à la question 2b.

3. On pose $Y = P^{-1}X$.

Montrer que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

Comme $Y = P^{-1}X$, on a : $Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$ par linéarité de la dérivation (chaque composante du vecteur $P^{-1}X$ est une combinaison linéaire des composantes de X).

On a alors, en remarquant que $Y' = P^{-1}X' \iff X' = PY'$ et en utilisant la relation $A = PTP^{-1}$:

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff PY' = PTP^{-1}X \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{=I} Y' = \underbrace{P^{-1}P}_{=I} T \underbrace{P^{-1}X}_{=Y} \\ &\iff Y' = TY \end{aligned}$$

4. (a) **Résoudre l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_1) : \varphi' = \varphi$.
 $(\mathcal{E}_1) : \varphi' - \varphi = 0$ admet comme ensemble de solution : $\mathcal{S}_1 = \{\varphi(t) = \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- (b) **Résoudre l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.
 $(\mathcal{E}_2) : \varphi' + \varphi = 0$ admet comme ensemble de solution : $\mathcal{S}_2 = \{\varphi(t) = \mu e^{-t}, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- (c) **Soit** $c \in \mathbb{R}$. **Montrer que la fonction** $t \mapsto cte^{-t}$ **est une solution particulière de l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.
 Posons $y(t) = cte^{-t}$ fonction dérivable. On a :

$$y'(t) = ce^{-t} - cte^{-t} = ce^{-t} - y(t)$$

ce qui montre que y est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

5. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

Montrer que α est solution de $(\mathcal{E}_1)$, γ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et β est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

On a :

$$\begin{aligned} Y' = TY &\iff \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \beta' = -\beta + 2\gamma \\ \gamma' = -\gamma \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \lambda e^t & \text{solution de } (\mathcal{E}_1) \\ \beta' = -\beta + 2\mu e^{-t} & \text{solution de } (\mathcal{E}_3) \text{ avec } c = 2\mu \\ \gamma = \mu e^{-t} & \text{solution de } (\mathcal{E}_2) \end{cases} \end{aligned}$$

6. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1) e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2) e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

Il reste à déterminer β dans la question précédente pour obtenir le vecteur Y .
 Or, β s'écrit comme la somme de la solution générale de $(\mathcal{E}_2)$ et d'une solution particulière de $(\mathcal{E}_3)$, ce qui donne d'après les questions 4b et 4c avec $c = 2\mu$:

$$\beta = ve^{-t} + 2\mu te^{-t}$$

Ainsi, on obtient : $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ ve^{-t} + 2\mu te^{-t} \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix}$ ce qui permet d'obtenir X avec la relation $X = PY$ soit :

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ ve^{-t} + 2\mu te^{-t} \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ve^{-t} + 2\mu te^{-t} \\ \lambda e^t + 2\mu e^{-t} \\ \lambda e^t + ve^{-t} + 2\mu te^{-t} + \mu e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mu t + v)e^{-t} \\ 2\mu e^{-t} + \lambda e^t \\ \lambda e^t + (v + \mu + 2\mu t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

En posant $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_3 = \lambda$ et $v = \lambda_2 - \lambda_1$, on obtient le résultat annoncé.

7. **En déduire une solution de (E) non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système.**
 Les points d'équilibres du système sont des solutions constituées de fonctions constantes donc vérifiant $X' = 0$ soit $AX = 0$ soit $X \in \text{Ker}(A)$. Or, A n'est pas inversible ($0 \notin \text{Sp}(A)$) donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et l'unique état d'équilibre est le point $(0, 0, 0)$.
 Si $\lambda_3 \neq 0$, les trajectoires divergent car $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty$.
 On va donc choisir $\lambda_3 = 0$ et λ_1 et λ_2 quelconques.

Par exemple, en choisissant $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$ (pour simplifier l'expression), on obtient comme solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

qui est une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre $(0, 0, 0)$ puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$.