

- EXERCICE 1 -

On note $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer son gradient et sa matrice Hessienne en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que le point $(1, 2)$ est un point critique de f .
3. Déterminer tous les points critiques de f .

- EXERCICE 2 -

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

1. Montrer que f admet un seul extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser sa nature et sa valeur.
2. Calculer $3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ puis l'exprimer à l'aide de la fonction f .
3. Dédire des questions précédentes que l'extremum trouvé est global.

- EXERCICE 3 -

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
(b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
(c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
(d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .
4. (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
(b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

- EXERCICE 4 -

Soit la fonction f définie par : $f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$.

1. Préciser le domaine de définition de f et le représenter. *On admet que ce domaine est ouvert.*
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.
3. Montrer que f admet un seul extremum local. Préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global?

- EXERCICE 5 -

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par : $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a : $f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer la matrice Hessienne de f puis montrer qu'on ne peut pas conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
5. (a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.
(b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par : $g(x, y) = 2\ln(x+y) - \ln x - \ln y$.
Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, g(x, y) \geq 2\ln 2$.

- EXERCICE 6 -

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel : $x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution notée α et vérifier que $\alpha > 0$.
2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$.
3. (a) Montrer que la matrice hessienne de f au point $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$, que l'on notera H est $H = \begin{pmatrix} 2+\alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
(b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 + \alpha \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 + 4\alpha \end{cases}$.
(c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$?

- EXERCICE 7 -

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

1. On considère l'application $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.
(a) Dresser le tableau de variations de φ , en précisant les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$ et sa valeur en 0.
(b) Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application g suivante :

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble U .
3. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 1b.
4. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$? en $(\alpha, -2)$?
5. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

- EXERCICE 8 -

On considère la fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par : $f(x) = e^x - e \ln(x)$.

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) Montrer que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.
On donne : $2,7 < e < 2,8$ et $7,3 < e^2 < 7,4$.
(c) Montrer que la fonction $h: x \mapsto f'(x) + x$ est bijective.
2. On considère la fonction $F:]1, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, définie, pour tout (x, y) de $]1, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - xy.$$

- (a) Montrer, en utilisant les résultats précédents, que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α, α) , le réel α ayant été défini à la question 1b.
- (b) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α) .
- (c) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, préciser sa nature.

- EXERCICE 9 -

On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2y^3 + y^4 + 2xy$.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les lignes de niveau de cette fonction.

1. Quelle conjecture peut-on formuler sur l'existence d'extrema pour f ?
2. Vérifier votre conjecture par le calcul.

On vérifiera que f est positive en remarquant que $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 10 -

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n -uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ (resp. $y_1, y_2, \dots, y_n$) ne sont pas tous égaux.

On appelle moyenne arithmétique $\bar{x}$ et écart-type σ_x du n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$, les réels suivants :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart-type σ_y du n -uplet $y = (y_1, \dots, y_n)$.

La covariance $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad \text{et} \quad \rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe le réel $f(a, b)$ tel que :

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{(xy)} - \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{en notant} \quad \overline{(xy)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$\text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\bar{x})^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2 \quad \text{en notant} \quad \overline{(x^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

3. Montrer que f possède un unique point critique, noté $(\tilde{a}, \tilde{b})$, tel que : $\tilde{a} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}$ et $\tilde{b} = -\frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \bar{x} + \bar{y}$.

4. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .

5. Établir : $f(\tilde{a}, \tilde{b}) = n\sigma_y^2(1 - \rho(x, y)^2)$.

6. En déduire que $|\rho(x, y)| \leq 1$. Que dire du nuage de points lorsque $|\rho(x, y)| = 1$?

