

- EXERCICE 1 -

On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$.

1. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer son gradient et sa matrice Hessienne en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.**

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient après calculs : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (y-2)(2x+y-7) \\ (x-1)(x+2y-8) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-2) & 2x+2y-9 \\ 2x+2y-9 & 2(x-1) \end{pmatrix}$$

2. **Vérifier que le point $(1, 2)$ est un point critique de f .**

Il s'agit de vérifier que $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est clairement le cas.

3. **Déterminer tous les points critiques de f .**

$\mathbb{R}^2$ étant ouvert, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} (y-2)(2x+y-7) = 0 \\ (x-1)(x+2y-8) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y-2 = 0 \\ (x-1)(x+2y-8) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x+y-7 = 0 \\ (x-1)(x+2y-8) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2 \\ (x-1)(x-4) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 7-2x \\ (x-1)(x+2(7-2x)-8) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 7-2x \\ (x-1)(-3x+6) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc F admet 4 points critiques : $A = (1, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (1, 5)$, $D = (2, 3)$.

- EXERCICE 2 -

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

1. **Montrer que f admet un seul extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser sa nature et sa valeur.**

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

• On obtient après calculs : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x+8y+1 \\ 8x+6y-2 \end{pmatrix}$

• On obtient après résolution : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (-1/2, 1)$.

Donc f admet un unique point critique : $A = (-1/2, 1)$.

• On obtient après calculs : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Notons : $H_A = \nabla^2 f(-1/2, 1) = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ (la matrice ne dépend ni de x ni de y).

On obtient :

$\lambda \in Sp(H_A)$ ssi $H_A - \lambda I$ non inversible ssi $(18-\lambda)(6-\lambda) - 64 = 0$ ssi $\lambda^2 - 24\lambda + 44 = 0$.

On remarque alors que 2 est racine évidente ce qui permet de factoriser par $(\lambda - 2)$.

On obtient alors : $\lambda^2 - 24\lambda + 44 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda - 22) = 0$. Donc $Sp(H_A) = \{2, 22\}$.

Les deux vp de H_A sont strictement positives donc $A = (-1/2, 1)$ est minimum local et le minimum vaut $f(-1/2, 1) = -5/4$.

2. **Calculer $3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ puis l'exprimer à l'aide de la fonction f .**

On a :

$$\begin{aligned} 3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= 3\left[\left(y + \frac{4}{3}x\right)^2 - \frac{2}{3}\left(y + \frac{4}{3}x\right) + \frac{1}{9}\right] + \frac{11}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3\left[y^2 + \frac{8}{3}xy + \frac{16}{9}x^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}\right] + \frac{11}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3y^2 + 8xy + \frac{16}{3}x^2 - 2y - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{11}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + \frac{11}{12} \\ &= 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y + \frac{15}{12} \\ &= f(x, y) + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

3. **Déduire des questions précédentes que l'extremum trouvé est global.**

Le minimum $f(-1/2, 1) = -\frac{5}{4}$ est un minimum global ssi pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq f(-1/2, 1) = -\frac{5}{4}$.

Or, la relation de la question précédente donne : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) + \frac{5}{4} = f(x, y) - f(-1/2, 1) = 3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Ainsi : $f(x, y) - f(-1/2, 1) \geq 0$ donc $f(x, y) \geq f(-1/2, 1)$, ce qui prouve que $A = (-1/2, 1)$ est minimum global.

- EXERCICE 3 -

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. **Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.**

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$.

2. **Montrer que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**

Déterminons le gradient de f . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\partial_1(f)(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

Déterminons les points critiques de f .

$\mathbb{R}^2$ est un domaine ouvert et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f ssi $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x^3 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &\iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 = (-x)^3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \quad \text{car } t \mapsto t^3 \text{ est bijective} \\ &\iff \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, f possède trois points critiques : $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. (a) **Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .**

On obtient, f étant de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 12x^2 - 4, \quad \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 12y^2 - 4 \quad \text{et} \quad \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = 4$$

- (b) **Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.**

On peut alors écrire les matrices hessiennes de f en chaque point :

$$H_A = \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_B = \nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_C = \nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

- (c) **Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.**

- En $A = (0, 0)$:

$$\lambda \in Sp(H_A) \text{ ssi } H_A - \lambda I = \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ 4 & -4 - \lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible}$$

$$\text{ssi } (-4 - \lambda)^2 - 16 = 0 \iff 8\lambda - \lambda^2 = 0 \iff \lambda(8 + \lambda) = 0.$$

- En $B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: $\lambda \in Sp(H_B)$ ssi $H_B - \lambda I = \begin{pmatrix} 20 - \lambda & 4 \\ 4 & 20 - \lambda \end{pmatrix}$ est non inversible

$$\text{ssi } (20 - \lambda)^2 - 16 = 0 \iff (20 - \lambda - 4)(20 - \lambda + 4) = 0 \iff (16 - \lambda)(24 - \lambda) = 0.$$

Ainsi, $Sp(H_B) = \{16, 24\}$. Ces deux valeurs propres sont strictement positives donc f admet un minimum local en B qui vaut $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

- De même en $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: f admet un minimum local en C qui vaut $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

- (d) **Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .**

On a :

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2(x - x)^2 = 2x^4 \geq 0 \text{ au voisinage de } x = 0.$$

$$f(x, -x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x + x)^2 = -8x^2 + 2x^4 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -8x^2 \leq 0 \text{ au voisinage de } x = 0.$$

Comme $f(0, 0) = 0$ et que f n'est pas de signe constant au voisinage de $(0, 0)$, on en déduit f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

4. (a) **Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.**

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, On a :

$$f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy = -8$$

- (b) **Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?**

On rappelle f admet un minimum local en B et C qui vaut $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

Ainsi, on a avec la question précédente :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -8 + (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq -8 = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

donc f admet un minimum global B (et en C).

- EXERCICE 4 -

Soit la fonction f définie par : $f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$.

1. **Préciser le domaine de définition de f et le représenter. On admet que ce domaine est ouvert.**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x, y)$ est définie si et seulement si $\ln(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et y quelconque.

Ainsi, $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.**

- $(x, y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car polynomiale à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

- Comme $t \mapsto \ln(t)^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $(x, y) \mapsto \ln(x)^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par composition.

Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par somme et produit.

3. **Montrer que f admet un seul extremum local. Préciser sa nature et sa valeur.**

- On obtient après calculs : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ étant ouvert, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ln(x) + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f admet deux points critiques : $A = (1, 0)$ et $B = (e^{-2}, 0)$.

- On obtient après calculs : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ puis on trouve :

- En $A = (1, 0)$: $H_A = \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $Sp(H_A) = \{2\}$. Ainsi, $\nabla^2 f(1, 0)$ admet une vp (double) strictement positive donc f admet un minimum local en A .

- En $B = (e^{-2}, 0)$: $H_B = \nabla^2 f(e^{-2}, 0) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ donc $Sp(H_B) = \{-2e^2, 2e^{-2}\}$. Ainsi, $\nabla^2 f(e^{-2}, 0)$ admet deux vp non nulles de signes opposés donc B est un point col.

Ainsi, f n'admet qu'un seul extremum local en $A = (1, 0)$.

4. **Cet extremum est-il global ?**

Il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \geq f(1, 0)$.

On calcule $f(1, 0) = 0$.

Or, on a clairement $f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ soit $f(x, y) \geq f(1, 0)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ donc A est un minimum global.

- EXERCICE 5 -

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par : $f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$.

1. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.**

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions polynomiales de dénominateur non nul (car $x > 0$ et $y > 0$).

2. **Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :** $f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

3. **Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.**

La formule de f de la question précédente est plus pratique pour calculer les dérivées partielles. On a pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$:

$$\partial_1(f)(x, y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

Le domaine $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ étant ouvert, $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 y} = 0 \\ \frac{y^2 - x^2}{y^2 x} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \{(x - y)(x + y) = 0\} \\ &\iff \begin{cases} (x - y) = 0 & \text{car } x + y \neq 0 \text{ (} x > 0; y > 0 \text{)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, f possède une infinité de points critiques qui sont de la forme $\{(x, x), x \in]0, +\infty[\}$.

4. **Déterminer la matrice Hessienne de f puis montrer qu'on ne peut pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.**
On a pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, en utilisant le théorème de Schwartz pour les dérivées croisées (f étant de classe $\mathcal{C}^2$) :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = \frac{2y}{x^3} \quad \text{et} \quad \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = \frac{2x}{y^3}$$

On en déduit la matrice Hessienne de f en tout point critique de la forme (x, x) avec $x > 0$:

$$\nabla^2 f(x, x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^3} & -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} & \frac{2x}{x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} & -\frac{2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible (car $C_2 = -C_1$) donc 0 est une valeur propre de la matrice Hessienne donc on ne peut pas conclure quant à l'existence d'un extremum local en (x, x) .

Remarque : Si on analyse bien la question, on se rend qu'on qu'il suffit de montrer que 0 est valeur propre de la matrice Hessienne (seul possibilité de la méthode qui nous permet de dire qu'on ne peut pas conclure). Inutile donc ici de déterminer le spectre de la matrice. Savoir que 0 est valeur propre suffit (la valeur de l'autre valeur propre n'est pas utile).

5. (a) **Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.**

On a :

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$$

donc $(x + y)^2 \geq 4xy$.

- (b) **En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.**

Considérons un point critique de la forme (a, a) , $a > 0$.

Il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a : $f(x, y) \geq f(a, a) = 4$ car $f(a, a) = \frac{(2a)^2}{a^2} = 4$.

Or, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} (x + y)^2 \geq 4xy &\iff \frac{(x + y)^2}{xy} \geq 4 \quad \text{car } xy > 0 \\ &\iff f(x, y) \geq 4 \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum global en tout point critique de la forme (a, a) qui vaut $f(a, a) = 4$.

6. **Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :** $g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y$.

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $g(x, y) \geq 2\ln 2$.

Pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y \\ &= \ln((x + y)^2) - \ln(xy) \\ &= \ln\left(\frac{(x + y)^2}{xy}\right) \\ &= \ln(f(x, y)) \end{aligned}$$

Or, on a vu que pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$: $f(x, y) \geq 4$.

Donc par croissance de la fonction $\ln$, on obtient : $g(x, y) = \ln(f(x, y)) \geq \ln(4) = 2\ln(2)$.

- EXERCICE 6 -

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel : $x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

1. **Montrer que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution notée α et vérifier que $\alpha > 0$.**

On a : $e^{-x} = x \iff e^{-x} - x = 0$.

Posons $h : x \mapsto e^{-x} - x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x : $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ donc la fonction h est strictement décroissante.

D'autre part, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t + t = +\infty$ par somme et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - x = -\infty$ par somme.

La fonction h étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ d'après les calculs de limites précédents.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{-x} - x = 0$ admet une unique solution α .

Enfin, comme $h(0) = 1 > 0$, on a : $h(0) > h(\alpha)$ donc $0 < \alpha$ par décroissance stricte de h .

2. **Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$.**

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

La fonction $(x, y) \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale donc $(x, y) \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y - e^{-x} \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$.

$\mathbb{R}^2$ étant ouvert, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un unique point critique : $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$.

3. (a) **Montrer que la matrice hessienne de f au point $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$, que l'on notera H est $H = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.**

$$\text{On a pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a : $H = \nabla^2 f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-\alpha} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ car $e^{-\alpha} = \alpha$ d'après la première question.

- (b) **Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :** $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 + \alpha \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 + 4\alpha \end{cases}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(H) &\iff H - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 + \alpha - \lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\iff (2 + \alpha - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \\ &\iff 8 + 4\alpha - \lambda(2 + \alpha + 4) + \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - (6 + \alpha)\lambda + (4\alpha + 4) = 0 \end{aligned}$$

Notons $Q(\lambda) = \lambda^2 - (6 + \alpha)\lambda + (4\alpha + 4)$. On a alors :

$$\Delta = (-(6 + \alpha))^2 - 4(4\alpha + 4) = 36 + 12\alpha + \alpha^2 - 16\alpha - 16 = 20 - 4\alpha + \alpha^2 = 16 + (4 - 4\alpha + \alpha^2) = 16 + (\alpha - 2)^2 > 0$$

Donc $\Delta > 0$ et Q admet deux racines λ_1 et λ_2 .

Par propriété des polynômes, on peut factoriser $Q(\lambda)$ par $(\lambda - \lambda_1)$ et $(\lambda - \lambda_2)$ puisque λ_1 et λ_2 sont des racines.

Ainsi, on a : $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ soit, en développant cette expression :

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$$

Par identification avec l'expression

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - (6 + \alpha)\lambda + (4\alpha + 4)$$

$$\text{on obtient : } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 + \alpha \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 + 4\alpha \end{cases}.$$

- (c) **La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$?**

Comme $\alpha > 0$, on a : $\lambda_1 \lambda_2 = 4 + 4\alpha > 0$ donc le produit des vp est strictement positif donc elles sont de même signe (soit toutes deux positives, soit toutes deux négatives).

D'autre part, $\lambda_1 + \lambda_2 = 6 + \alpha > 0$ donc les deux vp sont toutes deux strictement positives.

On en déduit que f présente un minimum local en $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$.

- EXERCICE 7 -

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

1. **On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.**

- (a) **Dresser le tableau de variations de φ , en précisant les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$ et sa valeur en 0.**

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout x réel, on a :

$$\varphi'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x)$$

qui est du signe de $x(2 + x)$. On en déduit le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x		$-$	$-$	$+$
$x + 2$		$-$	$+$	$+$
φ'		$+$	$-$	$+$
φ	-1	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			-1	$+\infty$

avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ par C.C donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ par produit et somme.

- (b) **Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.**

$$\text{On a : } e^x = \frac{1}{x^2} \iff x^2 e^x = 1 \iff \varphi(x) = 0.$$

Or, φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] -1; +\infty[$ d'après la question précédente. Or, 0 appartient à $] -1; +\infty[$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, admet une unique solution sur $]0; +\infty[$ que l'on α .

On a de plus :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 = \frac{e^{1/2} - 4}{4} < 0 \quad \text{car } e^{1/2} < e < 3.$$

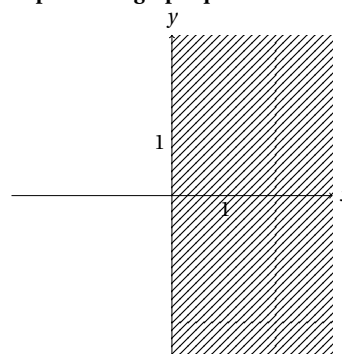
$$\varphi(1) = e - 1 > 2 - 1 > 0.$$

Ainsi, on a par stricte croissance de φ sur $\mathbb{R}_+$ $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(1) \iff \frac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application g suivante :

$$g = U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

2. **Représenter graphiquement l'ensemble U .**



3. **Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 1b.**

La fonction $(x, y) \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme composée $((x, y) \mapsto x \text{ et } t \mapsto e^t)$. De même pour $(x, y) \mapsto e^y$. Donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme produit et quotient de dénominateur non nul (polynomiale). On a pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_1(g)(x, y) = \frac{-1}{x^2} + e^x \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = -2ye^y - y^2 e^y$$

Déterminons les points critiques de g sur l'ouvert U .

$(x, y) \in U$ est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \frac{-1}{x^2} + e^x = 0 \\ -2ye^y - y^2e^y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^x = \frac{1}{x^2} \\ 2y + y^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \alpha & \text{d'après Q 1b} \\ y(2 + y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, g admet exactement deux points critiques : $A = (\alpha, 0)$ et $B = (\alpha, -2)$

4. **Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$? en $(\alpha, -2)$?**

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2. On a, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned}\partial_{1,1}(g)(x, y) &= \frac{2}{x^3} + e^x & \partial_{1,2}(g)(x, y) &= 0 \\ \partial_{2,1}(g)(x, y) &= 0 & \partial_{2,2}(g)(x, y) &= -2e^y - 4ye^y - y^2e^y\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice hessienne est : $\nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + e^x & 0 \\ 0 & -2e^y - 4ye^y - y^2e^y \end{pmatrix}$.

- En $A = (\alpha, 0)$, on a : $H_A = \nabla^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux : $Sp(H_A) = \{\frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha; -2\}$. Les deux valeurs propres étant non nulles et de signes opposés (car $\alpha > 0$), on en déduit que g n'admet pas d'extremum local en $(\alpha, 0)$.

- En $(\alpha, -2)$, on a : $H_B = \nabla^2 g(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$.

Les deux valeurs propres sont strictement positives donc g admet un minimum local en $(\alpha, -2)$.

5. **Est-ce que g admet un extremum global sur U ?**

On remarque que g n'est ni majorée ni minorée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, 0) = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(1, y) = -\infty$.

Ainsi, g n'admet pas d'extremum global sur U .

- EXERCICE 8 -

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par : $f(x) = e^x - e \ln(x)$.

- (a) **Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.**
La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} .}$$

- (b) **Montrer que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.**

On donne : $2,7 < e < 2,8$ $7,3 < e^2 < 7,4$.

Posons $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) - x$. On a :

$$f'(x) = x \iff f'(x) - x = 0 \iff u(x) = 0$$

La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}u'(x) &= f''(x) - 1 \\ &= -10/13 -\end{aligned}$$

Or, on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > e^x > e^0 = 1 \quad \text{car exp est strictement croissante sur }]0, +\infty[$$

Ainsi, on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$u'(x) = f''(x) - 1 > 0$$

donc la fonction u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) - x = -\infty$ par somme de limites car $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ d'après l'étude précédente.
- De plus, $u(x) = f'(x) - x = e^x - \frac{e}{x} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ car $x = o(e^x)$ et $\frac{e}{x} = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$.
Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

La fonction u réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, l'équation $u(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

De plus, on a :

- $u(1) = f'(1) - 1 = -1 < 0$
- $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 7,3 - \frac{e}{2} - 2 = 5,3 - \frac{e}{2} > 0$ car $\frac{e}{2} < 1,4$ d'après les valeurs fournies.

Ainsi,

$$u(1) < u(\alpha) < u(2)$$

et par stricte croissance de u , on a :

$$1 < \alpha < 2$$

Finalement, l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une unique solution α]1, 2[.

- (c) **Montrer que la fonction $h : x \mapsto f'(x) + x$ est bijective.**

La fonction h est dérivable et $h'(x) = f''(x) + 1 > 0$ d'après l'étude précédente. Donc h est continue et strictement croissante donc bijective d'après le TBM.

2. **On considère la fonction $F :]1, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, définie, pour tout (x, y) de $]1, +\infty[^2$, par :**

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - xy.$$

- (a) **Montrer, en utilisant les résultats précédents, que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α, α) , le réel α ayant été défini à la question 1b.**

La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, déterminons les dérivées partielles de F en tout point (x, y) de $]1, +\infty[^2$. On a :

$$\partial_1 f(x, y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = f'(y) - x$$

Ainsi, (x, y) est un point critique de F si et seulement si $\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{cases}$.

Or :

$$\begin{aligned}\begin{cases} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} f'(x) = y \\ f'(y) = x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f'(x) - f'(y) = y - x & L_1 - L_2 \\ f'(y) = x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f'(x) + x = f'(y) + y \\ f'(y) = x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h(x) = h(y) \\ f'(y) = x \end{cases}\end{aligned}$$

Or, la fonction h est bijective (d'après la question précédente) donc on a : $h(x) = h(y) \iff x = y$, ce qui donne dans le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} h(x) = h(y) \\ f'(y) = x \end{cases} &\iff \begin{cases} x = y \\ f'(y) = x \end{cases} \\ & &\iff \begin{cases} x = y \\ f'(x) = x \end{cases} \\ & &\iff \begin{cases} y = \alpha \\ x = \alpha \end{cases} \quad \text{d'après la question 1b} \end{aligned}$$

Finalement, F admet un unique point critique en (α, α) .

(b) **Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α) .**

La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, déterminons les dérivées partielles d'ordre 2 de F en tout point (x, y) de $]1, +\infty[^2$. On a :

$$\partial_{1,1} f(x, y) = f''(x) \quad ; \quad \partial_{2,2} f(x, y) = f''(y) \quad ; \quad \partial_{1,2} f(x, y) = -1 \quad \text{et} \quad \partial_{2,1} f(x, y) = -1$$

ce qui donne la matrice hessienne de F en (α, α) suivante :

$$\nabla^2 f(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} & -1 \\ -1 & e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

(c) **La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, préciser sa nature.**

Déterminons les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (α, α) , notée H_α .

$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de H_α si et seulement si $H_\alpha - \lambda I_2$ est non inversible

donc $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de H_α si et seulement si $\begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}$ est non inversible

donc $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de H_α si et seulement si $(f''(\alpha) - \lambda)^2 - (-1)^2 = 0$.

Or :

$$(f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = 0 \iff (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1) = 0 \iff \lambda = f''(\alpha) - 1 \text{ ou } \lambda = f''(\alpha) + 1$$

De plus, on a :

$$\bullet f''(\alpha) + 1 = \alpha + \frac{e}{\alpha^2} + 1 > 0 \quad \text{car } \alpha \in]1, 2[\text{ donc } \alpha > 0.$$

$$\bullet f''(\alpha) - 1 = \alpha + \frac{e}{\alpha^2} - 1 > 0 \quad \text{car } \alpha \in]1, 2[\text{ donc } \alpha - 1 > 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (α, α) sont toutes deux strictement positives

donc F admet un minimum local au point (α, α) .

- EXERCICE 9 -

On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2y^3 + y^4 + 2xy$.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les lignes de niveau de cette fonction.

1. **Quelle conjecture peut-on formuler sur l'existence d'extrema pour f ?**

On peut conjecturer que la fonction f admet un minimum au point $A = (0, 0)$ et un minimum au point $B = (1, -1)$.

2. **Vérifier votre conjecture par le calcul.**

On vérifiera que f est positive en remarquant que $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 4y + 6y^2 + 4y^3 + 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 + 12y + 12y^2 \end{pmatrix}$$

Vérifions notre conjecture sur les points $A = (0, 0)$ et $B = (1, -1)$.

$$\text{On a : } \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = (0, 0)$ et $B = (1, -1)$ sont des points critiques de f .

De plus, on a : $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Notons H cette matrice Hessienne commune et déterminons son spectre. On a :

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ est valeur propre de } H \text{ si et seulement si } \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible}$$

$$\iff (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

D'après le relation coefficients / racines ($X^2 - SX + P$ avec S la somme et P le produit des racines), on en déduit que $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ et $\lambda_1 \lambda_2 = 4$.

Comme $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, les deux racines sont de même signe et non nulles et comme $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ on en déduit qu'elles sont strictement positives.

Ainsi, f admet un minimum local en A et en B .

On remarque d'ailleurs en suivant l'indication de l'énoncé que :

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = (x + y)^2 + y^2(1 + 2y + y^2) = (x + y)^2 + y^2(1 + y)^2 \geq 0$$

Comme $f(0, 0) = 0$ et $f(1, -1) = 0$, on en déduit que f admet un minimum global en A et en B .

Remarque :

L'étude théorique des points critiques en résolvant $\nabla f(x, y) = 0$ montre qu'il y a un troisième point critique.

En effet :

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 4y + 6y^2 + 4y^3 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 4y + 6y^2 + 4y^3 - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2y(1 + 3y + 2y^2) = 0 \end{cases}$$

Or, $1 + 3y + 2y^2 = 0$ donne facilement $y = -1$ ou $y = -\frac{1}{2}$. On a donc

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La matrice Hessienne au dernier point critique est $\nabla^2 f(1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est non inversible $\iff$

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0.$$

Toujours d'après la relation coefficients racines, on a : $\lambda_1 \lambda_2 = -2 < 0$ donc les deux racines sont de signe contraire et non nulles donc f admet un point col en $(1/2, -1/2)$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 10 -

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n -uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ (resp. $y_1, y_2, \dots, y_n$) ne sont pas tous égaux.

On appelle moyenne arithmétique $\bar{x}$ et écart-type σ_x du n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$, les réels suivants :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart-type σ_y du n -uplet $y = (y_1, \dots, y_n)$.

La covariance $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad \text{et} \quad \rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe le réel $f(a, b)$ tel que :

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{(xy)} - \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{en notant} \quad \overline{(xy)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$\text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\bar{x})^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2 \quad \text{en notant} \quad \overline{(x^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

3. Montrer que f possède un unique point critique, noté $(\tilde{a}, \tilde{b})$, tel que : $\tilde{a} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}$ et $\tilde{b} = -\frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \bar{x} + \bar{y}$.

4. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .

5. Établir : $f(\tilde{a}, \tilde{b}) = n\sigma_y^2(1 - \rho(x, y)^2)$.

6. En déduire que $|\rho(x, y)| \leq 1$. Que dire du nuage de points lorsque $|\rho(x, y)| = 1$?