

- EXERCICE 1 -

On considère la matrice M et les vecteurs V_1, V_2 et V_3 définis par :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1. Déterminer le spectre de M . La matrice M est-elle diagonalisable?
- 2. Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d’une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l’urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n’est pas remise dans l’urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l’événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du i -ième tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l’urne à l’issue du n -ième tirage. On admet que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et on note U_n son n -ième état probabiliste.

- 3. Déterminer U_0 et préciser les états de la chaine de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4. Représenter le graphe probabiliste associé à la chaine de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant les probabilités de transition.
- 5. Exprimer la matrice de transition A de cette chaine de Markov en fonction de M .
- 6. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un unique état stable et le déterminer.
- 7. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = U_n A$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = {}^tV_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tV_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tV_3$.
(c) Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers l’état stable U de la chaîne, c’est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = U$.

- EXERCICE 2 -

On considère un marché sur lequel trois fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces trois fournisseurs, chacun d’eux étant choisi de façon équiprobable. Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l’un ou plusieurs des n premiers consommateurs.

Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et on note U_n son n -ième état probabiliste.

- 1. (a) Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste associé à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n M$.
(c) On suppose $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U .
Que représente U pour la chaîne de Markov. Déterminer U .
- 2. On considère les matrices colonnes $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - (a) Déterminer deux réels α et β tels que $ML = \alpha L + \beta J$.
 - (b) En multipliant l’égalité précédente par U_n à gauche, en déduire que : $E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta$.
 - (c) Déterminer l’expression de $E(X_n)$ en fonction de n .
 - (d) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$ où X est la variable aléatoire associée au vecteur U de la question 1c.

- EXERCICE 3 -

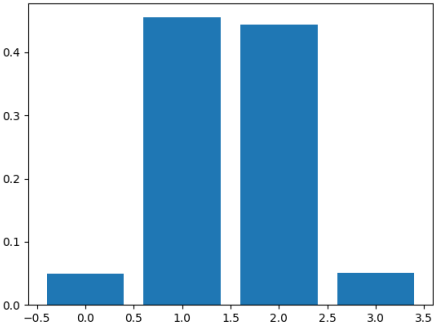
On considère deux urnes : la première, notée U_1 , contient trois boules blanches, et la seconde, notée U_2 , trois boules noires.

On répète indéfiniment l’expérience suivante : on tire au hasard une boule dans U_1 , une boule dans U_2 , et on les change d’urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches dans l’urne 1 à l’issue de n échanges.

- 1. Justifier que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov et donner ses états.
- 2. Pour tout $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, calculer $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i)$, et $P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = i)$.
- 3. Déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ lorsque $|i - j| > 1$.
- 4. Déterminer $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$.
- 5. Déterminer le graphe et la matrice de transition, notée M , de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$.
- 6. Informatique.
 - (a) Écrire une fonction Python "def SimuX(n) : qui prend un entier n en paramètre et qui renvoie la valeur de X_n .
 - (b) On considère le programme suivant. Que représente le diagramme obtenu?

```
1 n = 50
2 ES = np.zeros(4)
3 for k in range(10000):
4     ES[simuX(n)] += 1/10000
5 plt.bar([0,1,2,3], ES)
6 plt.show()
```



- (c) On considère le programme suivant

```
1 >>> A = np.array([[0,9,0,0], [1,4,4,0], [0,4,4,1], [0,0,9,0]])
2 >>> al.eig( np.transpose(A) )
```

ainsi le résultat renvoyé :

```
1 eigenvalues=array([ 9.,  3., -3., -1.]), eigenvectors=
2 array([[ -0.07808688,  0.2236068 , -0.2236068 ,  0.5
3          [ -0.70278193,  0.67082039,  0.67082039, -0.5
4          [ -0.70278193, -0.67082039, -0.67082039, -0.5
5          [ -0.07808688, -0.2236068 ,  0.2236068 ,  0.5]])
```

- i. Exprimer M en fonction de la matrice A donnée par le programme ci-dessus.
- ii. Soit U un état stable de la chaine de Markov. Que représente tU pour la matrice tA ?
- iii. Expliquer comment le résultat renvoyé permet d’obtenir un état stable de la chaine de Markov.
- iv. On note P le tableau numpy renvoyé dans `eigenvectors` par le programme précédent. Compléter le programme suivant afin qu’il renvoie cet état stable U .

```
1 V = P[:,0] # P correspond au array renvoyé dans eigenvectors
2 U = V / .....
3 print(U)
```

- v. Ce dernier programme renvoie `array([0.05, 0.45, 0.45, 0.05])`.
Est ce cohérent avec un résultat obtenu précédemment?