

- EXERCICE 1 -

On considère la matrice M et les vecteurs V_1, V_2 et V_3 définis par :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de M . La matrice M est-elle diagonalisable?

La matrice M est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. On a, en faisant attention au facteur $1/6$: $Sp(M) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

2. Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .

On obtient après calculs :

$$MV_1 = V_1; \quad MV_2 = \frac{1}{2}V_2; \quad MV_3 = \frac{1}{3}V_3$$

Comme ces vecteurs sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $1, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

La famille (V_1, V_2, V_3) est libre car formée de trois vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes et contient trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du i -ième tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n -ième tirage. On admet que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et on note U_n son n -ième état probabiliste.

3. Déterminer U_0 et préciser les états de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a clairement $X_0 = 2$ donc $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ pour $n \geq 2$ donc les états de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont $\{0, 1, 2\}$.

4. Représenter le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant les probabilités de transition.

Précisions quelques probabilités de transition. On a

- $P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = 1$ car si il n'y a pas de boules blanches après le tirage n , on est certain qu'il n'y en n'aura pas après le suivant.
- $P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = 1/2$ car si il y a 1 boule blanche après le tirage n (donc une blanche et une rouge) il n'y en aura plus au suivant si on tire cette boule blanche (avec probabilité $1/2$).
- $P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) = 0$ car l'évènement est impossible. Si il y a deux boules dans l'urne, il en restera soit 1 soit 2 après un autre tirage donc il ne peut donc y en avoir 0.

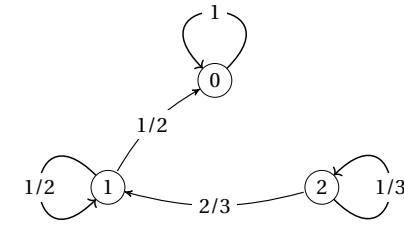
De même, on a :

$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) = 0 \quad P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = 1/2 \quad P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) = 2/3$$

et

$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) = 0 \quad P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = 0 \quad P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) = 1/3$$

Ainsi le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est



5. Exprimer la matrice de transition A de cette chaîne de Markov en fonction de M .

D'après les résultats de la question précédente, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = {}^t M$$

6. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un unique état stable et le déterminer.

Une loi de probabilité U est un état stable de la chaîne de Markov si et seulement si ${}^t U$ est un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre 1.

Or ${}^t A = M$ et on a vu que $\text{Ker}(M - I) = \text{Vect}(V_1)$ (car $\dim(E_1(M)) = 1$).

Ainsi, $U = {}^t V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'unique état stable de la chaîne de Markov (c'est bien une loi de probabilité).

7. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = U_n A$.

En utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $((X_n = 0); (X_n = 1); (X_n = 2);)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) \\ &= 1P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + 0P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0] & \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] & \mathbb{P}[X_{n+1} = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] & \mathbb{P}[X_n = 1] & \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

soit $U_{n+1} = U_n A$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = {}^t V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n {}^t V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^t V_3$.

Par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété précédente.

$$\bullet U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_0 = 0] & \mathbb{P}[X_0 = 1] & \mathbb{P}[X_0 = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 {}^t V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 {}^t V_3 = {}^t V_1 + {}^t V_2 + {}^t V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

après calculs. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors en utilisant l'HR et en remarquant que $A = {}^tM$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n A = \left({}^tV_1 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n {}^tV_2 + \left(\frac{1}{3} \right)^n {}^tV_3 \right) A \\ &= \underbrace{{}^tV_1 {}^tM}_{{}^t(MV_1) = {}^tV_1} + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \underbrace{{}^tV_2 {}^tM}_{{}^t(MV_2) = \frac{1}{2} {}^tV_2} + \left(\frac{1}{3} \right)^n \underbrace{{}^tV_3 {}^tM}_{{}^t(MV_3) = \frac{1}{3} {}^tV_3} \\ &= {}^tV_1 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{2} {}^tV_2 + \left(\frac{1}{3} \right)^n \frac{1}{3} {}^tV_3 \\ &= {}^tV_1 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} {}^tV_2 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} {}^tV_3 \end{aligned}$$

car $MV_1 = V_1 \iff {}^t(MV_1) = {}^tV_1$ et de même pour V_2 et V_3 . donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = {}^tV_1 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n {}^tV_2 + \left(\frac{1}{3} \right)^n {}^tV_3$.

- (c) **Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers l'état stable U de la chaîne, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = U$.**
On obtient alors :

$$U_n = (\mathbb{P}[X_n = 0] \quad \mathbb{P}[X_n = 1] \quad \mathbb{P}[X_n = 2]) = \left(1 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

puis en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient (avec $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $0 < \frac{1}{3} < 1$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[X_n = 0] = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[X_n = 1] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[X_n = 2] = 0.$$

Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers l'état stable de la chaîne $U = (1 \quad 0 \quad 0)$.

- EXERCICE 2 -

On considère un marché sur lequel trois fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs.

Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces trois fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des n premiers consommateurs.

Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et on note U_n son n -ième état probabiliste.

1. (a) **Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste associé à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.**

Précisions quelques probabilités de transition. On a

- $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}$ car si 1 seul fournisseur a été choisi par les n premiers consommateurs alors le $n+1$ -ième choisira ce même fournisseur avec probabilité $\frac{1}{3}$ (1 fournisseur parmi les trois disponibles).
- $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{3}$ car si 1 seul fournisseur a été choisi par les n premiers consommateurs alors le $n+1$ -ième choisira un autre fournisseur ($X_{n+1} = 2$) avec probabilité $\frac{2}{3}$ (2 fournisseurs possibles parmi les trois disponibles).
- $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3) = 0$ car le $n+1$ -ième consommateur ne peut choisir qu'un seul fournisseur donc si $X_n = 1$, alors $X_{n+1} = 1$ ou 2.

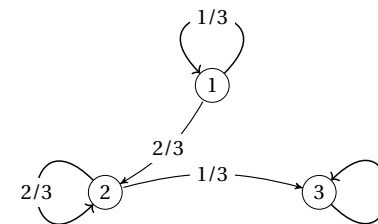
De même, on a :

$$P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = 0 \quad P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = 2/3 \quad P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 1/3$$

et

$$P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = 0 \quad P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = 0 \quad P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 1$$

Ainsi le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est



ce qui donne comme matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

- (b) **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n M$.**

En utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE ($(X_n = 1); (X_n = 2); (X_n = 3);$), on obtient avec les probabilités de transition de la question précédente :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) \\ &= \frac{1}{3}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 3) \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 3) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3)P(X_n = 3) \\ &= \frac{1}{3}P(X_n = 2) + P(X_n = 3) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$(\mathbb{P}[X_{n+1} = 1] \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = 2] \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = 3]) = (\mathbb{P}[X_n = 1] \quad \mathbb{P}[X_n = 2] \quad \mathbb{P}[X_n = 3]) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

soit $U_{n+1} = U_n M$.

- (c) **On suppose $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U .**

Que représente U pour la chaîne de Markov. Déterminer U .

Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U , U est forcément un état stable de la chaîne d'après le cours.

Remarque : cela signifie que (X_n) converge en loi vers une variable Z dont la loi de probabilité est U .

Or, $U = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)$ (loi de probabilité) est un état stable de la chaîne si et seulement si tU est un vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1 et $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ (loi de probabilité).

$$\text{Or, on a après calcul : } \text{Ker}({}^tM - I) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, on a : $U = (0 \quad 0 \quad 1)$.

2. **On considère les matrices colonnes $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**

- (a) **Déterminer deux réels α et β tels que** $ML = \alpha L + \beta J$.

On a :

$$ML = \alpha L + \beta J \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta \\ 3\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

ce qui donne après résolution $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = 1$.

- (b) **En multipliant l'égalité précédente par U_n à gauche, en déduire que :** $E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta$.

On a :

$$ML = \alpha L + \beta J \implies U_n ML = \alpha U_n L + \beta U_n J$$

$$\implies U_{n+1} L = \alpha U_n L + \beta U_n J$$

$$\implies \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2) & P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \underbrace{P(X_{n+1}=1) + 2P(X_{n+1}=2) + 3P(X_{n+1}=3)}_{=E(X_{n+1})} =$$

$$\alpha \underbrace{(P(X_n=1) + 2P(X_n=2) + 3P(X_n=3))}_{=E(X_n)} + \beta \underbrace{(P(X_n=1) + P(X_n=2) + P(X_n=3))}_{=1}$$

$$\implies E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta$$

car $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

- (c) **Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n .**

Si on pose $w_n = E(X_n)$, on reconnaît une suite arithmético-géométrique de la forme $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$

avec $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = 1$ soit : $w_{n+1} = \frac{2}{3} w_n + 1$.

On cherche le point fixe : $\ell = \frac{2}{3} \ell + 1 \iff \ell = 3$.

On a alors $z_n = w_n - 3$ qui est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $z_1 = w_1 - 3 = -2$ car $w_1 = E(X_1) = 1$ car $X_1 = 1$ (1 seul fournisseur choisi par le premier consommateur).

Ainsi, on a : $\forall n \geq 1, z_n = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et donc : $E(X_n) = w_n = z_n + 3 = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$.

- (d) **Vérifier que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$ **où X est la variable aléatoire associée au vecteur U de la question 1c.**

Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 3$.

Or, on a : $U = \begin{pmatrix} P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E(X) = 0.1 + 0.2 + 1.3 = 3$ donc on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$.

- EXERCICE 3 -

On considère deux urnes : la première, notée U_1 , contient trois boules blanches, et la seconde, notée U_2 , trois boules noires.

On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans U_1 , une boule dans U_2 , et on les change d'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne 1 à l'issue de n échanges.

1. **Justifier que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov et donner ses états.**

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov car la valeur de X_{n+1} ne dépend que de la valeur de X_n .

On a clairement $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2, 3\}$ pour $n \geq 2$ donc les états de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont $\{0, 1, 2, 3\}$.

2. **Pour tout $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, calculer $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=i)$, et $P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=i)$.**

Si $(X_n = 0)$ est réalisé, l'urne U_1 ne contient que des boules noires (3 noires) et l'urne ne contient que des

-5/8-

boules blanches donc on va échanger une blanche et une noire donc il est certains que l'urne U_1 contiendra une seule blanche après l'échange soit :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$ et $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=i) = 0$ pour $i \in \{0, 2, 3\}$.

Le même raisonnement donne :

$P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2) = 1$ et $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=i) = 0$ pour $i \in \{0, 1, 3\}$.

3. **Déterminer** $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ **lorsque $|i-j| > 1$.**

Si $|i-j| > 1$, réaliser l'évènement $(X_{n+1}=j)$ sachant que $(X_n=i)$ est réalisé signifie que le nombre de boules blanches a augmenté ou diminué d'au moins 2, ce qui est impossible. En effet, l'urne U_1 peut perdre au plus une boule blanche (si elle est piochée et échangée avec une noire) et en gagner au plus une (si une boule noire est échangée avec une blanche).

Ainsi, si $|i-j| > 1$ alors $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = 0$.

4. **Déterminer** $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)$.

Notons $B_{n,1}$ (resp. $N_{n,1}$) l'évènement "tirer une boule blanche (resp. noire) dans U_1 au tirage n " et $B_{n,2}$ (resp. $N_{n,2}$) l'évènement "tirer une boule blanche (resp. noire) dans U_2 au tirage n " :

• Si $(X_n = 1)$ est réalisé (U_1 contient exactement une boule blanche), l'évènement $(X_{n+1} = 1)$ est réalisé si cette boule blanche est échangée avec une blanche de l'urne U_2 ou si deux boules noires sont échangées entre les deux urnes. Ainsi, on a par incompatibilité puis indépendance :

$$\begin{aligned} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) &= P_{(X_n=1)}(B_{n,1}B_{n,2} \cup N_{n,1}N_{n,2}) \\ &= P_{(X_n=1)}(B_{n,1})P_{(X_n=1)}(B_{n,2}) + P_{(X_n=1)}(N_{n,1})P_{(X_n=1)}(N_{n,2}) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

car il y a 1 blanche et 2 noires dans U_1 et 2 blanches et 1 noires dans U_2 .

• De même :

$$\begin{aligned} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) &= P_{(X_n=1)}(N_{n,1}B_{n,2}) \\ &= \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

• De même :

$$\begin{aligned} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) &= P_{(X_n=1)}(B_{n,1}N_{n,2}) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a déjà obtenu $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3) = 0$ à la question précédente.

5. **Déterminer le graphe et la matrice de transition, notée M , de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$.**

Il nous reste à trouver les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$, $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$ et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)$ car on a déjà $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 0$.

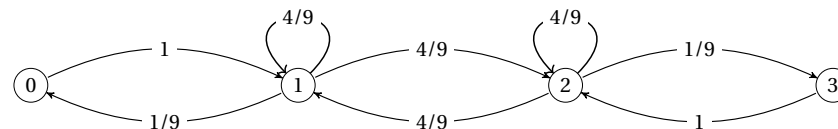
Comme précédemment, on obtient :

$$\bullet P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = P_{(X_n=2)}(B_{n,1}N_{n,2}) = \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\bullet P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = P_{(X_n=2)}(B_{n,1}B_{n,2} \cup N_{n,1}N_{n,2}) = \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\bullet P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3) = P_{(X_n=2)}(N_{n,1}B_{n,2}) = \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Le graphe de la chaîne de Markov est donc :



et la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

-6/8-

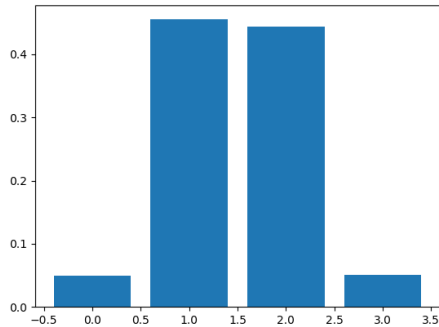
6. Informatique.

- (a) Écrire une fonction Python "def SimuX(n) : qui prend un entier n en paramètre et qui renvoie la valeur de X_n .

```
1 def SimuX(n):
2     X = 3
3     for k in range(n):
4         if X == 0 : # si on est en 0 et est sur d'aller en 1
5             X = 1
6         elif X == 1 : # si on est en 1
7             r = rd.rand()
8             if r<1/9 :
9                 X = 0 # on va en 0 avec proba 1/9
10            elif r<5/9 :
11                X = 1 # on reste en 1 avec proba 4/9
12            else :
13                X = 2 # on va en 2 avec proba 4/9
14        elif X == 2 : # si on est en 2 ... idem
15            r = rd.rand()
16            if r<1/9 :
17                X = 3
18            elif r<5/9 :
19                X = 2
20            else :
21                X = 1
22        else : # si on est en 3 et est sur d'aller en 2
23            X = 2
24    return X
```

- (b) On considère le programme suivant. Que représente le diagramme obtenu?

```
1 n = 50
2 ES = np.zeros(4)
3 for k in range(10000):
4     ES[SimuX(n)] += 1/10000
5 plt.bar([0,1,2,3], ES)
6 plt.show()
```



Le programme simule 10000 fois X_n (pour n grand : $n = 50$) et stocke les fréquences de chacun des états. Le diagramme représente donc les fréquence de X_{50} . Si la chaîne de Markov converge, X_{50} peut-être considéré comme une approximation d'un état stable puisqu'en cas de convergence, l'état limite correspond à un état stable.

- (c) On considère le programme suivant

```
1 >>> A = np.array([[0,9,0,0], [1,4,4,0], [0,4,4,1], [0,0,9,0]])
2 >>> al.eig( np.transpose(A) )
```

ainsi le résultat renvoyé :

```
1 eigenvalues=array([ 9.,  3., -3., -1.]), eigenvectors=
2 array([[ -0.07808688,  0.2236068 , -0.2236068 ,  0.5       ],
```

```
3      [ -0.70278193,  0.67082039,  0.67082039, -0.5       ],
4      [ -0.70278193, -0.67082039, -0.67082039, -0.5       ],
5      [ -0.07808688, -0.2236068 ,  0.2236068 ,  0.5       ]])
```

- i. Exprimer M en fonction de la matrice A donnée par le programme ci-dessus.

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 9M$

- ii. Soit U un état stable de la chaîne de Markov. Que représente tU pour la matrice tA ?

Si U est un état stable de la chaîne de Markov, alors :

$$UM = U \iff \frac{1}{9}UA = U \iff UA = 9U \iff {}^tA{}^tU = 9{}^tU$$

ce qui signifie que tU est un vecteur propre de tA associé à la valeur propre 9.

- iii. Expliquer comment le résultat renvoyé permet d'obtenir un état stable de la chaîne de Markov.

La commande `al.eig(np.transpose(A))` renvoie la liste des valeurs propres de tA et la matrice de passage contenant les vecteurs propres associés. D'après la question précédente, on cherche un vecteur propre associé à la valeur propre 9, ce qui correspond à la première colonne de P (car 9 est la première vp dans la liste des vp).

Pour obtenir un état stable, on cherche une combinaison linéaire de ce vecteur dont la somme des composantes soit égale à 1 pour qu'il corresponde à une loi de probabilité.

Ainsi, on calcule la somme S des composantes du vecteur $V = \begin{pmatrix} -0.078... \\ -0.7027... \\ -0.7027... \\ -0.078... \end{pmatrix}$ pour obtenir l'état

$$\text{stable } U = \frac{1}{S} V.$$

- iv. On note P le tableau numpy renvoyé dans `eigenvectors` par le programme précédent. Compléter le programme suivant afin qu'il renvoie cet état stable U .

D'après la question précédente, il s'agit de diviser V par la somme de ses composantes

```
1 V = P[:,0] # P correspond au array renvoyé dans eigenvectors
2 U = V / np.sum(V)
3 print(U)
```

- v. Ce dernier programme renvoie `array([0.05, 0.45, 0.45, 0.05])`.

Est ce cohérent avec un résultat obtenu précédemment?

On remarque que l'état stable correspond au diagramme en bâton obtenu précédemment, d'où la cohérence des résultats.